TD 1 - Analyse dimensionnelle et ordre de grandeur

Compétences	Capacités associées	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2
S'approprier	Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole			☆				☆☆☆	☆☆
Analyser	Évaluer des ordres de grandeur			☆☆	☆			☆	
	Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples			☆		☆☆		☆	☆
	Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations							☆☆☆	☆
Réaliser	Conduire une analyse dimensionnelle	☆	☆		☆☆	☆☆	☆	☆☆☆	☆☆☆☆
	Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo							☆☆☆	☆
Valider	Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances.			☆☆				☆☆☆	☆
	Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information.							☆	☆
	Analyser les résultats de manière critique	☆	☆						

Total / 46 ★

1 Applications

1.1 Homogénéité d'une relation

1. Les grandeurs U, E_i sont des tensions, la grandeur I est un courant et les grandeurs R_i des résistances. En considérant la dimension des résultats proposés choisir la formule homogène.

$$a)\ U = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad b)\ U = \frac{R_1 E_1 + R_1(R_1 + R_2)E_2}{R_1 + R_2} \qquad c)\ U = \frac{R_1 R_2 I}{R_1 + R_2} + R_3 E \qquad d)\ U = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

2. Un solide de masse m assimilable à un point matériel glisse sans frottement sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné. Il est abandonné sans vitesse initiale à la hauteur h. En considérant la dimension des résultats proposés choisir la formule homogène :

$$a)\ v = \sqrt{\frac{2g}{h}} \qquad b)\ v = \sqrt{2gh} \qquad c)\ v = \sqrt{2mgh}$$

3. On utilise une plaquette conductrice parallélépipédique de longueur L, de largeur b, d'épaisseur h dans laquelle on impose un courant d'intensité I dans la direction de la longueur. Les charges mobiles sont des électrons de charge q dont la densité particulaire est n^* et la vitesse d'ensemble v. On admet que $I = -qn^* vbh$. Vérifier l'homogénéité de cette relation.
4. On considère un gaz parfait dont l'équation d'état (reliant sa pression p, son volume V, sa température T et sa quantité de matière n est $pV = nRT$ où R est la constante des gaz parfaits. Avec k une constante sans dimension, M la masse molaire du gaz et ρ sa masse volumique, déterminer la formule homogène donnant la vitesse de propagation c du son dans ce gaz :

$$a)\ c = \frac{kRT}{M} \qquad b)\ c = k\sqrt{\frac{RT}{M}} \qquad c)\ c = k\sqrt{\frac{RT}{\rho}}$$

1.2 Homogénéité d'une formule physique

1. Vérifier l'homogénéité de la relation
$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$
c étant la célérité de la lumière dans le vide, ε_0 la permittivité du vide, μ_0 la perméabilité du vide. Les constantes ε_0 et μ_0 s'expriment respectivement en $kg^{-1}.m^{-3}.A^2.s^4$ et $N.A^{-2}$.
2. La pulsation ω d'un courant sinusoïdal est homogène à une vitesse angulaire. L est une inductance, C une capacité ; les grandeurs $L\omega$ et $1/C\omega$ sont homogènes à une résistance R.
   (a) Montrer que les expressions L/R, RC et $\sqrt{LC}$ sont homogènes à des temps.
   (b) Déterminer la dimension de R (en fonction des dimension fondamentales), sachant que la puissance P dissipée dans un résistor de résistance R et parcouru par un courant d'intensité I est donnée par
$$P = RI^2.$$
   (c) En déduire les équations aux dimensions de L et de C.

(d) Vérifier l'homogénéité des formules suivantes :

$$i)\ C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2} \qquad ii)\ I = C\omega U \qquad iii)\ C = \frac{U}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

1.3 Ordres de grandeurs

1. Soit un terrain de sport de 100m sur 75m dont on estime la taille de la tribune à 100m sur 37,5m pour que les spectateurs du fond ne soient pas beaucoup plus loin du terrain que ceux de devant. Estimer le nombre de places dans la tribune.
2. Une manifestation dans les rues de Paris a été mesurée comme faisant 2km de long. Estimer le nombre de personnes.
3. Estimer le nombre de cheveux que possède un humain sur sa tête.
4. Combien peut-on rentrer de balles de golf dans un bus.

2 Exercices

2.1 Interaction gravitationnelle

On rappelle l'expression de l'intensité de la force gravitationnelle s'exerçant entre deux masses m et M :

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

où G est la constante universelle de gravitation et r la distance entre les deux masses.

1. Quelle est la dimension de G? Donnez son unité dans le système SI.
2. On considère un satellite de masse m effectuant une trajectoire circulaire de rayon R autour de la Terre de masse M. Soit T la période de révolution du satellite. Par analyse dimensionnelle, retrouver la 3 ème loi de Kepler de la forme :

$$\frac{T^\alpha}{R^\beta} = \frac{4\pi^2}{G^\gamma M^\delta}$$

3. Mars, Jupiter et Saturne possèdent respectivement les périodes de révolutions $T_M = 686{,}9$j, $T_J = 4335{,}3$j et $T_S = 10757{,}7$j. En déduire leur distance au Soleil.

2.2 Vibration d'une étoile

On cherche à déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de la fréquence de vibration f d'une étoile. D'après le modèle de Rayleigh (1915), la cohésion d'une étoile est assurée par les forces de gravitation. On s'attend donc à devoir faire intervenir dans l'expression de f les grandeurs suivantes : R rayon de l'étoile, ρ la masse volumique de l'étoile et G constante universelle de gravitation. Déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de f en fonction de R, ρ et G à une constante multiplicative près.

2.3 Electromagnétisme

1. Déterminer la dimension de la perméabilité du vide μ_0 sachant que cette constante apparaît dans la relation suivante :

$$F = \frac{\mu_0 L I^2}{2\pi r}$$

2. Déterminer la dimension de la permittivité du vide ε_0 sachant que cette constante apparaît dans la relation suivante :

$$F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

3. A partir de ε_0 et μ_0, construire une grandeur homogène à une vitesse.

3 Problèmes

3.1 Cuisson d'un rôti

Nous allons voir qu'une petite analyse dimensionnelle peut remplacer une recette de cuisine. On souhaite déterminer le temps de cuisson d'un rôti de 800 g. On sait, d'après une recette, qu'il faut 32 minutes pour cuire un rôti de 1 kilogramme à 220°C. On se placera à température constante.
On sent bien que le temps de cuisson dépend de la masse m du rôti. Il dépendra aussi de sa masse volumique ρ. Pour que l'intérieur cuise, il faut que la chaleur pénètre la viande. On en déduit que le temps de cuisson dépend également de la conductivité thermique λ. Un dernier paramètre s'impose : la capacité thermique massique c_p. En effet la chaleur ne fait que se transmettre si elle n'est pas stockée.

1. Sachant que la capacité thermique massique est homogène à une énergie divisée par une masse et une température, et que la conductivité thermique est homogène à une puissance divisée par une longueur et une température, déterminer, à partir d'une analyse dimensionnelle, exprimer un temps caractéristique à partir des quatre grandeurs intervenants dans le problème.
2. A quelle puissance intervient la masse dans ce temps caractéristique ?
3. En déduire le temps de cuisson.

Madame Saint Ange, auteur d'un best-seller culinaire un peu ancien (1925) conseillait de cuire 16 minutes par livre un rôti de un kilogramme, mais seulement 10 à 12 minutes par livre un rôti de 1,8 à 2 kilogrammes.

4. Comment cette nouvelle grandeur caractéristique qu'est le temps de cuisson par unité de masse s'exprime en fonction de la masse du rôti ?
5. Concluez quant à la pertinence du modèle utilisé.

3.2 Puissance d'une bombe nucléaire

Une légende en physique voudrait que l'analyse dimensionnelle ait permis à Geoffrey Ingram Taylor d'estimer, en 1950, l'énergie dégagée par l'explosion d'une bombe nucléaire, alors que cette information était classée top secret (à partir des images d'explosion qui ne l'étaient pas). Le physicien Taylor suppose a priori que le processus d'expansion de la sphère d'explosion dépend au minimum des paramètres suivants :

— le temps t
— l'énergie E dégagée par l'explosion
— la masse volumique de l'air ρ environnant.

1. Déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de l'énergie dégagée E en fonction de t, ρ et du rayon r de plasma.
2. En mesurant le diamètre du nuage sur la photo réalisée après 15 ms, faire l'application numérique. On prendra pour densité de l'air $\rho = 1,2 \text{kg.m}^{-3}$.
3. A l'aide des mesures du rayon du nuage en fonction du temps, vérifier la dépendance des paramètres t et r0.10.

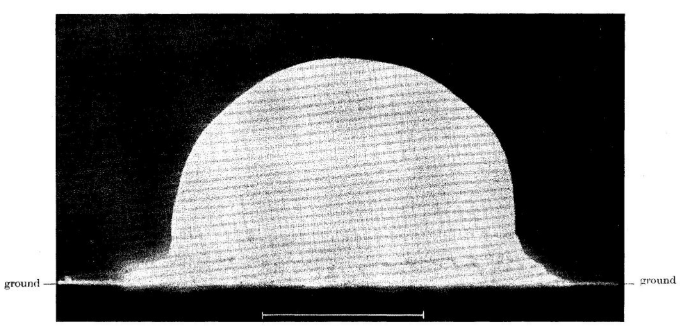

FIGURE 7. The ball of fire at $t = 15$ msec., showing the sharpness of its edge.

temps (ms)	rayon (m)
0,1	11,1
0,2	19,9
0,4	25,4
0,5	28,8
0,7	31,9
0,8	34,2
0,9	36,3
1,1	38,9
1,2	41,0
1,4	42,8
1,5	44,4
1,7	46,0
1,8	46,9

temps (ms)	rayon (m)
1,9	48,7
3,3	59,0
3,5	61,1
3,8	62,9
4,1	64,3
4,3	65,6
4,6	67,3
15,0	106,5
25,0	130,0
34,0	145,0
53,0	175,0
62,0	185,0

Correction

3.1 Cuisson d'un rôti

1. Commencer par faire l'inventaire des grandeurs. Déterminer la dimension de ces grandeurs. Déterminer un temps caractéristique à partir d'une équation aux dimensions utilisant ces grandeurs.

$$dim(T) = dim\left(m^{\alpha}\rho^{\beta}\lambda^{\gamma}c_p^{\delta}\right)$$

$$dim(T) = M^{\alpha+\beta+\gamma}L^{\gamma+2\delta-3\beta}T^{-3\gamma-2\delta}\Theta^{-\gamma-\delta}.$$

Cette équation à une solution si les quatre équations suivantes ont une solution. C'est le cas :

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \qquad \gamma+2\delta-3\beta=0 \qquad -3\gamma-2\delta=1 \qquad -\gamma-\delta=0.$$

Soit, $\alpha = 2/3,\ \beta = 1/3,\ \gamma = -1,\ \delta = 1.$

2. D'après la question précédente, on trouve $dim(T) = dim\left(\dfrac{m^{2/3}\rho^{1/3}c_p}{\lambda}\right)$. La masse intervient donc à la puissance 2/3.

La question précédente permet d'avoir un lien de proportionnalité entre le temps de cuisson et la masse du rôti à la puissance 2/3. Faire le rapport entre les deux temps pour éliminer la constante de proportionnalité. On pourra utiliser des notations avec des indices pour différencier le rôti de 800g et celui de 1kg.

Notons $m_1 = 800\ g$ et $m_2 = 1\ kg$. Pour Le rôti de masse m_2 le temps de cuisson est de $T_2 = 32$ minutes. Nous cherchons le temps de cuisson T_1 du rôti de masse m_1, les autres grandeurs étant constantes. D'après la question précédente, le temps caractéristique de cuisson est proportionnel à la masse à la puissance 2/3, c'est à dire que $T = km^{2/3}$ avec k une constante de proportionnalité (qui dépend bien sûr des autres grandeurs du problème et qui tient compte des facteurs numériques).
On écrit le rapport entre ces deux temps ce qui permet de s'affranchir de cette constante k que nous n'avons pas besoin de connaître :

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{2/3}.$$

A.N. $T_1 = (0,8)^{2/3} \times 32 = 28$ min.

3. Résoudre l'équation aux dimensions avec une nouvelle grandeur caractéristique homogène à un temps divisé par une masse. On pourra utiliser directement la réponse de la question 2, en divisant le temps caractéristique par une masse. On pourra utiliser une notation de type T_m pour décrire le temps de cuisson par unité de masse.

On choisit de noter T_m le temps de cuisson par unité de masse. On a alors $dim(T_m) = T/M$. D'après la question 2 on a donc T_m qui dépend de la masse à la puissance -1/3 :

$$dim(T_m) = dim(m^{-1/3}\rho^{1/3}c_p\lambda^{-1}).$$

4. Comparer les informations données par l'énoncé en s'aidant du raisonnement fait à la question 3.

On obtient, d'après la question précédente, que le rapport des temps de cuisson par unité de masse dépend du rapport entre les masses à la puissance -1/3. D'après l'énoncé, le rapport des temps de cuisson par unité de masse est entre $16/12 = 1,3$ et $16/10 = 1,6$, et le rapport des masses à la puissance -1/3 est entre $(1/1,8)^{-1/3} = 1,2$ et $(1/2)^{-1/3} = 1,3$. Le modèle semble en accord avec le livre de recette, il semble donc pertinent! On aurait pu rajouter d'autres paramètres que ceux présents dans l'énoncé (un rôti coupé en tranches cuit bien plus vite). Ce modèle reste simpliste.