Devoir Surveillé de Physique n°5

Thème : Énergie mécanique - Moment cinétique
Durée : 4h

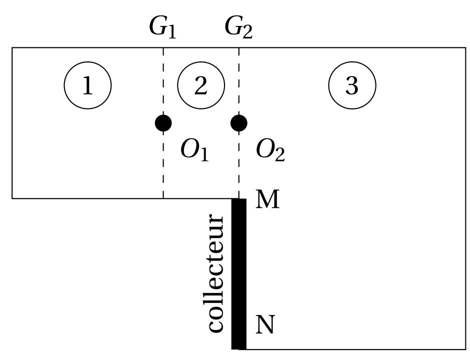
L'usage de la calculatrice est interdit. Les consignes sont identiques aux précédents devoirs. Toutes les parties sont indépendantes..

1 Questions de cours (15 min)

1. Justifiez rigoureusement le fait que la trajectoire de deux points matériels isolés est forcément plane dans un référentiel galiléen. Quel(s) quantité(s) physiques est(sont) conservée(s) ?
2. Soit un solide en rotation autour d'un axe fixe (dans un référentiel galiléen) ne subissant aucun moment extérieur. Quel est l'impact de la diminution du moment d'inertie sur la vitesse angulaire de rotation? Justifiez.
3. Retrouver l'équation de l'oscillateur harmonique pour un pendule pesant. Le pendule est constitué d'une tige de longueur ℓ et de masse m en rotation autour d'une de ses extrémités. Une démonstration rigoureuse est attendue.

2 Spectrographie de masse

Un spectrographe de masse es constitué de plusieurs parties comme l'indique la figure ci-contre :



1. La chambre d'ionisation dans laquelle des atomes de potassium ${}^{A_1}_{19}\mathrm{K}$ et ${}^{A_2}_{19}\mathrm{K}$ de masse respective m_1 et m_2 portés à haute température sont ionisés en ions K^+. On considérera qu'à la sortie de cette chambre en O_1, la vitesse des ions est quasi nulle;
2. La chambre d'accélération dans laquelle les ions sont accélérés entre O_1 et O_2 sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les deux grilles G_1 et G_2 ;
3. La chambre de déviation dans laquelle les ions sont déviés par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ de direction perpendiculaire au plan de figure. Un collecteur d'ions constitué d'une plaque photosensible est disposée entre M et N.

Les chambres sont sous vide. On négligera le poids des ions devant les autres forces et on admettra qu'à la sortie de la chambre d'accélération, les vecteurs vitesse des ions sont contenus dans le plan de la figure.

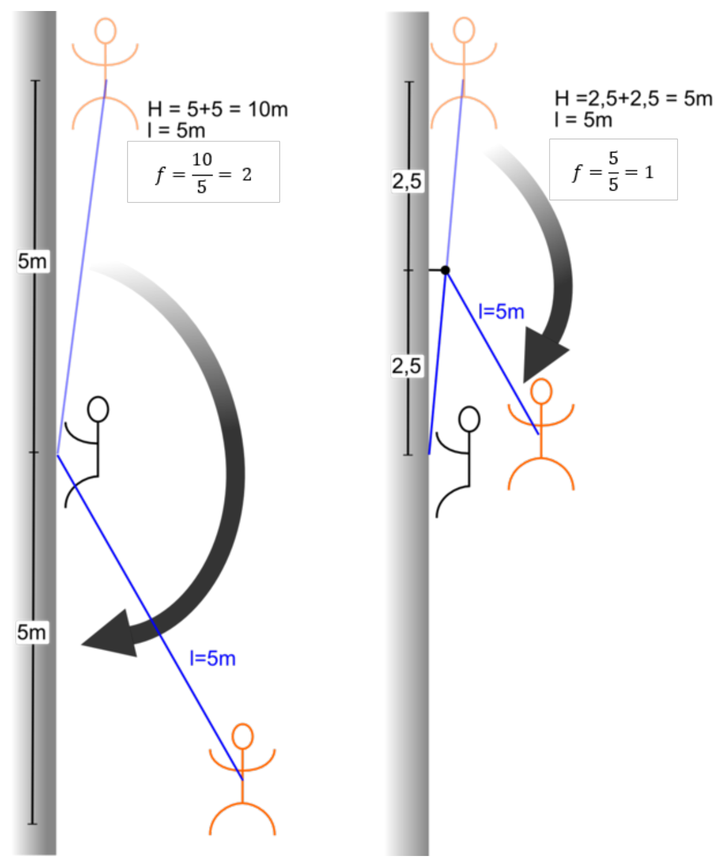
2.1 Accélération des ions

4. Quel doit être le signe de la différence de potentiel $\mathrm{V_{G_2}} - \mathrm{V_{G_1}}$ pour que les ions soient accélérés entre O_1 et O_2 ? On rappelle que le potentiel V multiplié par la charge du système est égal à l'énergie potentielle électrostatique du système.
5. Établir les expressions des vitesses v_1 et v_2 des ions lorsqu'ils parviennent en O_2 en fonction de m_1, m_2, e et $\mathrm{U} = \mathrm{V_{G_2}} - \mathrm{V_{G_1}}$.

2.2 Déviation des ions

6. Quel doit être le sens du champ magnétique $\vec{B}$ régnant dans la chambre de déviation pour que les ions puissent atteindre le collecteur?
7. Montrer que, dans la chambre de déviation, la trajectoire des ions est plane et leur mouvement uniforme.
8. Montrer que la trajectoire de chaque type d'ion est un arc de cercle dont on donnera le rayon R_1 (respectivement R_2) en fonction de m_1 (respectivement m_2), e, U et B.
9. En admettant que le rapport des masses des ions est égal au rapport de leurs nombre de masse, exprimer le rapport $\frac{A_1}{A_2}$ en fonction des rayons R_1 et R_2 des trajectoires.
10. Application numérique : on observe sur la plaque photosensible deux taches de centre T_1 et T_2 correspondant aux impacts des ions et telles que $O_2T_1 = 103,0$ cm et $O_2T_2 = 105,6$ cm. Déterminer A_2 sachant que $A_1 = 39$.
11. Décrire qualitativement quelle serait la trajectoire des ions si leur vitesse en O_2 n'était plus perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$.

3 Chute (encordée!) à l'escalade



Lors d'une sortie escalade, un grimpeur s'assure en passant sa corde dans des dégaines elles-même attachées à des pitons à expansion fixés au rocher. On supposera que la corde coulisse librement dans ces dégaines (pas de frottements). Le facteur de chute f est défini comme le rapport de la hauteur de chute sur la longueur L de corde utilisée. Si au moment de la chute, la corde est tendue, ce facteur de chute vaut $f = \frac{2\ell}{L}$ (figure ci-contre) où ℓ est la distance du grimpeur au dernier anneau. Dans des conditions normales d'utilisation f est compris entre 0 et 2. Pour les applications numériques, le poids P du grimpeur sera pris égal à 800 N. Le maillon fragile dans la chaîne d'assurance d'un grimpeur n'est pas la corde (qui peut résister à des forces de plus de 18 kN), ni les points où la corde est attachée au rocher (résistance de l'ordre de 20 kN) mais le grimpeur (une force de 12 kN exercée sur le bassin provoque sa rupture)! Les cordes utilisées en escalade sont élastiques de façon à diminuer la force qui s'exerce sur le grimpeur lors de sa chute. On assimilera une corde de montagne dont la longueur utilisée est L à un ressort de longueur à vide L et de raideur $k = \frac{1}{\alpha L}$. L'élasticité α de la corde est une grandeur caractéristique du matériau la constituant.

12. Exprimer la vitesse maximale atteinte par un grimpeur lors d'une chute en fonction du facteur f et de la longueur de corde L.

[/1] On supposera que le référentiel d'étude (terrestre) est Galiléen, que les frottements sont négligeables, que le grimpeur est assimilable à un point matériel. Une chute de hauteur 2ℓ sans vitesse initiale conduit à une vitesse maximale atteinte de $v_{max} = \sqrt{2g2\ell} = \sqrt{2gfL}$ (application du théorème de l'énergie mécanique : pas de forces non conservatives, l'énergie mécanique est donc conservée. Juste avant d'absorber l'énergie cinétique du grimpeur, l'énergie potentielle de la corde ne doit pas être prise en compte car celle-ci n'est pas tendue. Seule la masse de la corde pourrait intervenir ici, mais elle sera considérée faible devant celle du grimpeur.)

Soit un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide L auquel est suspendue un point matériel de masse m. À l'instant $t = 0$, le ressort est non tendu et m a une vitesse verticale, dirigée vers le bas, de module v_0.

13. Déterminer la valeur de l'élongation maximale du ressort x_{max} (mesurée à partir de la longueur à vide) en utilisant le théorème énergétique approprié.

    [/1] TEM en prenant comme conditions initiales une énergie potentielle élastique nulle (élongation nulle de la corde), une énergie cinétique de $\frac{1}{2}mv_{max}^2$ et une énergie potentielle de pesanteur nulle (l'élongation de la corde sera notée x, $-x$ correspondra donc à l'altitude du grimpeur pris à partir du moment où la corde se tend). Pour les conditions finales, nous prendrons une énergie cinétique nulle (ce qui permet de maximiser l'énergie potentielle élastique et donc la valeur de x. Nous obtenons :

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_{max}^2}_{\text{Energie mécanique initiale}} = \underbrace{\frac{1}{2}kx_{max}^2 - mgx_{max}}_{\text{Energie mécanique finale}}.$$

    On obtient une équation du second degré dont les solutions s'écrivent $x_{max}^{\pm} = \frac{mg}{k}\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{kv_{max}^2}{mg^2}}\right)$. La seule solution acceptable physiquement est celle où x_{max} est positive soit : $x_{max} = \frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+\frac{kv_{max}^2}{mg^2}}\right)$

14. Déterminer la force maximale F_{max} qu'il exerce sur la masse m.

    [/1] La force maximale qu'exerce la corde sur le grimpeur s'exprime $F_{max} = kx_{max} = mg\left(1+\sqrt{1+\frac{kv_{max}^2}{mg^2}}\right)$

15. En supposant le grimpeur assimilable à un point matériel, exprimer cette force maximale F_{max} exercée par la corde sur le grimpeur lors d'une chute d'un facteur f en fonction des données de l'énoncé. Que remarquez-vous ?

    [/1] Comme le poids du grimpeur vérifie $P = mg$, sa vitesse de chute maximale $v_{max} = \sqrt{2gfL}$ et $k = \frac{1}{\alpha L}$, on obtient

$$F_{max} = P\left(1+\sqrt{1+\frac{2f}{P\alpha}}\right).$$

    La force maximale qu'exerce la corde sur le grimpeur ne dépend que du poids, de l'élasticité de la corde et du facteur de chute (la hauteur de chute n'apparaît pas dans cette formule : doubler la hauteur de chute et la longueur de corde laisse inchangé le ressenti du grimpeur lors de sa chute).

Le corps humain peut résister à une force de l'ordre de 12 kN pendant un temps bref. Une corde d'escalade est prévue pour que la force maximale exercée sur l'alpiniste soit de 9 kN dans les conditions les plus défavorables ($f = 2$).

16. Calculer l'élasticité de cette corde (préciser les unités de α).

    [/1] AN : étape interm(P =800N et F_{max} =9 kN) $2f/P\alpha \simeq 100$, soit $\alpha \simeq 5.10^{-5}\mathrm{N}^{-1}$

17. Calculer l'élongation maximale de cette corde et la force maximale pour L = 10 m et f = 1 .
    [/1] $x_{max} = \alpha LP\left(1+\sqrt{1+\frac{2f}{\alpha P}}\right) \simeq$ 3 m pour une force maximale de 7 kN.
18. Qu'en est-il pour la *via ferrata* où la hauteur de chute est de 5 m et la longueur de la longe (corde à laquelle est accroché le grimpeur) est de 1 m .
    [/1] L'élasticité de la corde doit être différente car le facteur de chute est très important ($f = 5$, $L = 1$, $F_{max} = 13$ kN avec la même corde). C'est le cas, les longes en *via ferrata* sont plus élastiques et sont prévues pour ce type de chute.

Une corde utilisée en spéléologie est dite statique car son élasticité est faible (environ 5×10^{-6} S.I.).

19. À partir de quel facteur de chute y a-t-il danger de mort avec une telle corde ?
    [/1] $f = \frac{\alpha F_{max}(F_{max}-2P)}{2P}$ AN : $f \simeq 0,4$

L'étude précédente ne tient pas compte des phénomènes dissipatifs se produisant dans la corde. L'élongation de la corde est en fait inférieure à celle calculée avec le modèle choisi. La corde ne se comporte pas comme un ressort. Supposons que pendant toute la durée du freinage par la corde, elle s'allonge de façon à maintenir à 9 kN la force qu'elle exerce sur le grimpeur.

20. Exprimer la puissance de la somme des forces exercée sur le grimpeur pendant la phase d'élongation de la corde.
    [/1] $\mathscr{P} = (-F+mg)\dot{x}$.
21. Déterminer la valeur de l'élongation maximale de la corde en utilisant le théorème énergétique approprié.
    [/1] TEC : $\Delta E_c = (-F+mg)\Delta x$ soit $\frac{1}{2}mv_{max}^2 = (-F+mg)x_{max}$, *i.e.* $x_{max} = L\frac{fP}{F-P}$.
22. Calculer l'élongation maximale de la corde pour $L = 10$ m , $f = 1$ puis pour $L = 1$ m , $f = 5$.
    [/1] $x_{max} = L\frac{fP}{F-P}$ = 1m (resp. 0,5 m) pour f=1 (resp. 5) et L=10 m (resp. 1 m)

4 Distance minimale de freinage

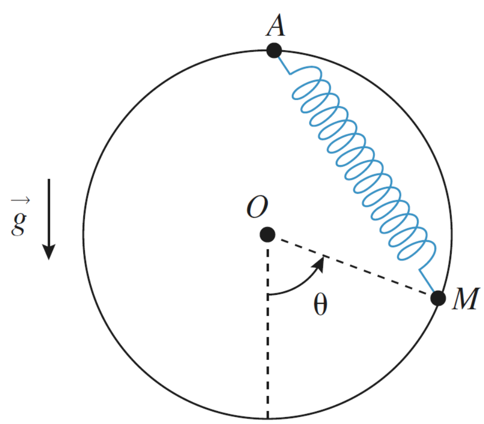
Une voiture roulant à 50 km h^{-1} s'immobilise sur une route rectiligne et horizontale au bout d'une distance de 40 m après début du freinage.

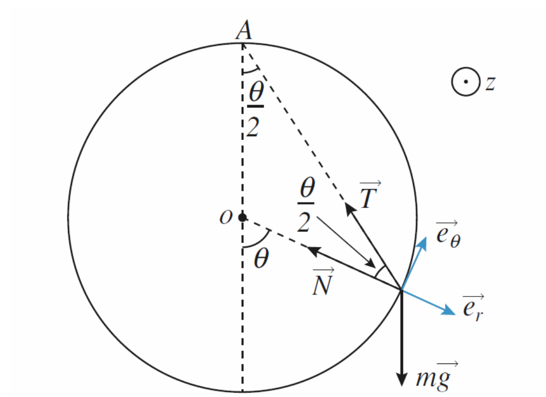
23. En supposant que la force de frottement entre le sol et la voiture soit constante et dans le sens opposé au déplacement de la voiture, déterminer la distance de freinage si le véhicule roule à 80 km h^{-1}. *Indication : le texte vous permet de déterminer la norme de la force de frottement*
    [/3] D'après le TEC appliqué à la voiture considéré comme un point matériel dans un référentiel Galiléen, $\Delta E_c = W$ avec W le travail des forces appliquées sur la voiture et E_c son énergie cinétique ([/1]). Pour une force de frottement F (résistive) constante sur un trajet de longueur L, son travail s'exprime $-FL$. Le poids donne un travail nul sur le trajet emprunté par la voiture tout comme la résultante normale au sol (forces orthogonales à la trajectoire horizontale) : le travail des forces exercées sur la voiture vaut $W = -FL$. La variation d'énergie cinétique entre l'état final (voiture immobilisé donc énergie cinétique nulle) et l'état initial vaut l'opposé de l'énergie cinétique initial : $\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv^2$ avec m la masse et v la vitesse de la voiture dans son état initial. Nous obtenons donc l'expression de la distance d'arrêt en fonction de la vitesse initiale du véhicule : $L = \frac{mv^2}{2F}$. La distance d'arrêt est proportionnel à v^2 ([/1]). Pour une vitesse de 80 km/h, la distance d'arrêt est de $40 \times (80/50)^2 \simeq$100 m. ([/1])
24. Déterminer la puissance de la force de frottement pour un véhicule d'une tonne. *Indication : par comparaison, 100 W est la puissance développée par les jambes d'un cycliste.*

[/1] Pour une force constante résistive, la vitesse du véhicule décroit linéairement de la vitesse initiale jusqu'à devenir nulle. La puissance de la force de frottement Fv décroit linéairement puisque F est constante. La valeur maximale est au début du mouvement : $Fv = \dfrac{mv^3}{2L} = 10^3(50/3,6)^3/80 \simeq 33$ kW

5 Rappel élastique le long d'un cercle

Une masselotte, assimilée à un point matériel M de masse m, est assujettie à glisser sans frottement sur un cercle vertical de centre O et rayon R. Elle est reliée au point A par un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos ℓ_0.





25. Écrire le vecteur position et vitesse du point matériel M dans une base adaptée au problème.
[/1] Base polaire : $\vec{r} = R\vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.
26. En déduire l'expression de l'énergie cinétique du point M en fonction de $\dot{\theta}$ et des paramètres du problème.
[/1] $\dfrac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$
27. Exprimer la somme des énergies potentielles dérivant des forces de rappel élastique et du poids en fonction de θ et des paramètres du problème. On donne *(mais je ne devrais pas...)* : $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.
[/1] $E_{p,pes} + E_{p,él} = -mgR\cos(\theta) + \dfrac{1}{2}k\left(2R\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - \ell_0\right)^2 + cte$
28. Déterminer, à partir de l'expression de l'énergie potentielle du point M, les différentes positions d'équilibre du point matériel. Vérifiez que les solutions obtenues correspondent bien à un angle existant.
[/2] TEM : $\Delta E_m = 0$ (aucune force non conservative excepté la composante normale au support qui est supposé orthogonal à la trajectoire en tout point donc de travail nul. La dérivée de l'énergie potentielle par rapport à θ nous donne les positions d'équilibre du système lorsque cette dérivée s'annule ([/1]) :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = mgR\sin(\theta) - kR\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(2R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \ell_0\right) = kR\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[2\left(\frac{mg}{k} - R\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \ell_0\right]$$

Les solutions sont donc $\theta = 0$ et $\theta = \pm\theta_0$ pour $\theta_0 \in [0,\pi]$ avec $\cos\left(\dfrac{\theta_0}{2}\right) = \dfrac{\ell_0}{2(R - mg/k)}$. Pour que l'angle θ_0 existe il faut que $0 \leq \dfrac{\ell_0}{2(R-mg/k)} \leq 1$ soit $kR - mg \geq 0$ et $kR - mg \geq \dfrac{k\ell_0}{2} \geq 0$.
29. Montrer que la stabilité des positions d'équilibre et leurs existence est modifiée en fonction de la valeur de $mg - kR$.

[/1] La position d'équilibre en $\theta = 0$ existe toujours. Stabilité : $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 Ep}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0} = R\left(mg - kR + \dfrac{\ell_0 k}{2}\right) > 0$ pour $mg - kR > \dfrac{k\ell_0}{2}$.

Les positions $\pm\theta_0$ existent si $mg - kR < \dfrac{k\ell_0}{2}$. $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 Ep}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\pm\theta_0} = \dfrac{kR\ell_0}{2}\sin(\theta_0/2)\tan(\theta_0/2) > 0$ si $\theta_0 \in]0,\pi[$ ce qui est le cas tant que $mg - kR < \dfrac{k\ell_0}{2}$. Cas particulier de la dérivée seconde nulle en $mg - kR = \dfrac{k\ell_0}{2}$ reste une position d'équilibre stable (à tracer numériquement). Pour résumer, si $mg - kR > \dfrac{k\ell_0}{2}$ il n'y a qu'une position d'équilibre stable en $\theta = 0$, si $mg - kR < \dfrac{k\ell_0}{2}$ il n'y a que 2 positions stables en $\theta = \pm\theta_0$ sur les trois positions d'équilibre $\{0, \pm\theta_0\}$.

30. Au voisinage d'une position d'équilibre, déterminer une constante de raideur effective κ à partir de l'expression de l'énergie potentielle telle que l'on puisse mettre l'équation différentielle de la masse autour de sa position d'équilibre $\theta_{éq}$ sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\kappa}{m}\left(\theta - \theta_{éq}\right) = 0$$

En déduire l'expression de la fréquence des oscillations autour d'une position d'équilibre en fonction des données du problème.

[/1] $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 Ep}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\pm\theta_0} = \dfrac{kR\ell_0}{2}\left[\dfrac{2(R - mg/k)}{\ell_0} - \dfrac{\ell_0}{2(R - mg/k)}\right]$ d'après les questions précédentes. Pour trouver la pulsation propre, on rappelle que $E_c = mR^2\dfrac{\dot{\theta}^2}{2}$ et que l'équation de l'oscillateur harmonique est obtenue en dérivant $E_c + E_p$ par rapport au temps. La pulsation propre s'écrit alors $\dfrac{\kappa}{m} = \omega_0^2 = \dfrac{1}{mR^2}\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 Ep}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\pm\theta_0} = \dfrac{k}{m}\left(\dfrac{(R - mg/k)^2 - \ell_0^2}{4R(R - mg/k)}\right)$, soit une raideur de $k\left(\dfrac{(R - mg/k)^2 - \ell_0^2}{4R(R - mg/k)}\right)$ et une fréquence de $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}\left(\dfrac{(R - mg/k)^2 - \ell_0^2}{4R(R - mg/k)}\right)}$

* * * fin du sujet * * *