

Épreuve de Physique-Chimie

Concours Blanc filière TSI & PTSI - Durée : 4h

L'usage de la calculatrice est interdit. Le sujet se compose de deux problèmes indépendants. Chaque problème est constitué de parties indépendantes.

1 Système de récupération d'énergie en discothèque

De nombreux systèmes de récupération d'énergie sont aujourd'hui utilisés pour alimenter des capteurs ou des petits dispositifs électroniques. Ces systèmes récupèrent de l'énergie de l'activité humaine, de la chaleur ambiante, de la lumière ou des vibrations. On étudie dans cette partie un système conçu et mis en œuvre par des ingénieurs néerlandais afin de récupérer de l'énergie issue de la danse, dans le contexte d'une discothèque (voir figure 1). Ce système a fait l'objet d'un brevet, publié en 2010 par l'entreprise Energy Floors®.



FIGURE 1 – Club Watt, Rotterdam (Sustainable Dance Club BV®)

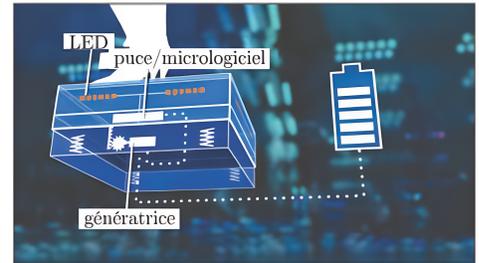


FIGURE 2 – Vue d'artiste du module récupérateur d'énergie (Sustainable Dance Club BV®)

La piste de danse est composée d'un réseau de modules surmontés de dalles mobiles, convertissant une partie de l'énergie cinétique des danseurs en énergie électrique. Cette énergie est ensuite utilisée pour éclairer, entre autres, une assemblée de diodes électroluminescentes (LED) multicolores situées sur les dalles et autour de la piste de danse (voir figure 2).

1.1 Mise en équation du mouvement de la dalle

Pour étudier le comportement mécanique du système récupérateur d'énergie, on se place à l'échelle d'un module unique, constitué d'une dalle de dimensions $65 \text{ cm} \times 65 \text{ cm} \times 14,5 \text{ cm}$ suspendue par des ressorts mécaniques.

Pour simplifier, on la modélise par une masse m reliée à un ressort équivalent de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k , ainsi qu'à un amortisseur mécanique (frottement fluide) de coefficient $D > 0$ (voir figure 3). On note $\vec{g} = -g\vec{e}_x$ le champ de pesanteur supposé uniforme. La dalle est repérée par sa position x sur un axe vertical ascendant de vecteur unitaire \vec{e}_x , l'origine O étant liée au bâti. Son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen; on note $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ son vecteur vitesse dans ce référentiel. Le déplacement linéaire vertical de la dalle est ensuite converti en mouvement de rotation par un engrenage de type pignon-crémaillère.

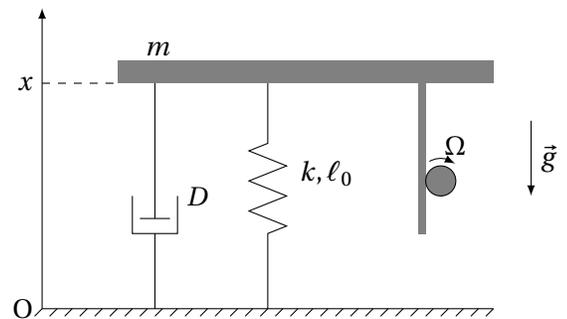


FIGURE 3 – Schéma de principe de la dalle.

1. Exprimer la force de rappel \vec{F}_r exercée par le ressort sur la dalle en fonction des données du problème.

$$\vec{F}_r = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x$$

[/1]

2. La dalle étant supposée au repos dans un premier temps, déterminer sa position d'équilibre x_{eq} en fonction de ℓ_0 , k , m et g . Vérifier l'homogénéité dimensionnelle et la pertinence physique de l'expression obtenue pour $m = 0$ et $m > 0$.

Après application du PFD dans \mathcal{R} galiléen au système dalle considéré comme point matériel de masse m , [1]
 l'accélération de la dalle étant nulle à l'équilibre pour $x = x_{\text{eq}}$, le poids de la dalle est opposée et égal en norme à
 la force de rappel élastique, ce qui donne $x_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$. [1]

Le poids mg est en Newton (dimension M.L.T⁻²) et k en Newton par mètres (dimension M.T⁻²), le rapport est
 bien homogène à une longueur tout comme ℓ_0 et x_{eq} . [1]

Pour $m = 0$ le ressort n'est pas comprimé donc $\vec{F}_r = \vec{0}$, sa longueur correspond à celle à vide $x_{\text{eq}} = \ell_0$. En posant
 une dalle sur le ressort, celui-ci se comprime et exerce une force de réaction censé être opposée au poids, suivant
 \vec{e}_x . Or d'après l'expression trouvée, $x_{\text{eq}} - \ell_0 < 0$ ce qui, avec la question 1, donne bien une force suivant \vec{e}_x . [1]

Un danseur de masse M monte sur la dalle : cette dernière se met alors en mouvement, avant de se stabiliser à une nouvelle
 position d'équilibre x'_{eq} .

3. Exprimer littéralement x'_{eq} puis montrer que l'affaissement de la dalle $\delta = x_{\text{eq}} - x'_{\text{eq}}$ s'exprime par : $\delta = \frac{Mg}{k}$

Le nouveau système à considérer est {la dalle + le danseur} traité comme un point matériel de masse $m + M$. On
 procède comme pour la question précédente : $x'_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{(m+M)g}{k}$, soit un affaissement $\delta = \frac{Mg}{k}$. [1]

Le constructeur précise ci-dessous un critère de dimensionnement du ressort équivalent :

Document 1.

Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club, IEEE Industry Applications Magazine, 2011 :
 Although the dancer is aware that energy is generated from the dance floor, the dancing experience should only be disturbed
 a little. Therefore, only little movement (several millimeters) of the suspended floor is allowed, and a high spring stiffness*
 has been selected to achieve this. *spring : ressort - stiffness : raideur.

4. En choisissant une valeur raisonnable pour M (adulte de corpulence moyenne), proposer une valeur de constante de
 raideur permettant de répondre en régime quasi-statique à la contrainte imposée.

L'affaissement est d'après le document 1. de quelques millimètres, soit δ entre 1 et 10 mm. Pour M entre 50
 et 100 kg, k est entre $5 \times 10^4 \text{ N.m}^{-1}$ et 10^6 N.m^{-1} après utilisation de la formule de l'affaissement et en prenant
 $g \simeq 10 \text{ m.s}^{-2}$. On prendra par la suite une valeur de raideur 10^5 N.m^{-1} , qui correspond à un affaissement de 1 mm
 pour 10 kg. [1]

On cherche à présent à décrire la dynamique du mouvement de la dalle. Outre son poids, la force de rappel du ressort et la
 force exercée par l'amortisseur mécanique, la dalle subit également :

- une force exercée par le danseur en mouvement, notée $\vec{F} = -F\vec{e}_x$;
 - une force d'amortissement électromagnétique $\vec{F}_\alpha = -\alpha\vec{v}$, avec $\alpha > 0$; on justifiera son expression dans la partie sui-
 vante.
5. Après avoir posé $X = x - x_{\text{eq}}$, montrer que le mouvement de la dalle est régi par une équation différentielle de la forme :

$$\ddot{X} + \left(\frac{D + \alpha}{m}\right)\dot{X} + a_0X = b_0,$$

où on donnera les expressions de a_0 et b_0 en fonction de k , m et F . Indiquez la signification physique de cette équation
 et des termes qui la compose.

PFD appliqué au système {dalle} projeté suivant \vec{e}_x : $m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) - mg - F - (\alpha + D)\dot{x}$ [1]

On reconnaît avec les questions précédentes : $-k(x - \ell_0) - mg = -k(x - x_{\text{eq}}) = -kX$. La dérivée temporelle pre-
 mière ou seconde de $x - x_{\text{eq}}$ est indépendante de x_{eq} qui est une constante, d'où $\ddot{X} = \ddot{x}$ et $\dot{X} = \dot{x}$. La projection du
 PFD se réécrit alors : $m\ddot{X} + (\alpha + D)\dot{X} + kX = F$. On identifie ainsi :

$$a_0 = \frac{k}{m} \qquad b_0 = \frac{F}{m}$$

[1]

On reconnaît l'équation d'un oscillateur amorti forcé. On reconnaît la pulsation propre du système $\sqrt{k/m}$, le terme de forçage F/m , et le facteur de qualité $\sqrt{km}/(D + \alpha)$. [1]

1.2 Principe de la conversion de puissance mécanique en puissance électrique

L'énergie cinétique du déplacement de la dalle est convertie en énergie électrique. Le dispositif est une génératrice en rotation que nous illustrerons simplement ici par une spire en rotation. Une spire circulaire (S), de résistance négligeable, de rayon a et de surface $S = \pi a^2$ et de centre O , tourne à vitesse angulaire ω supposée constante autour d'un de ses diamètre servant d'axe Oz au problème.

Les axes Ox , Oy et Oz sont munis de la base orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La position de (S) est repérée par l'angle $\theta = \omega t$ entre le plan xOz des coordonnées cartésiennes et le plan de la spire. L'orientation du sens positif du courant dans la spire est imposé (voir figure 4).

Cette spire est placée dans un champ magnétique uniforme constant, parallèle à l'axe Oy et noté $\vec{B} = B\vec{j}$ (B est une constante positive). La spire forme un circuit électrique fermé avec un dipôle X , la spire et X étant en série. Le coefficient d'auto-induction de la spire (S) est négligé.

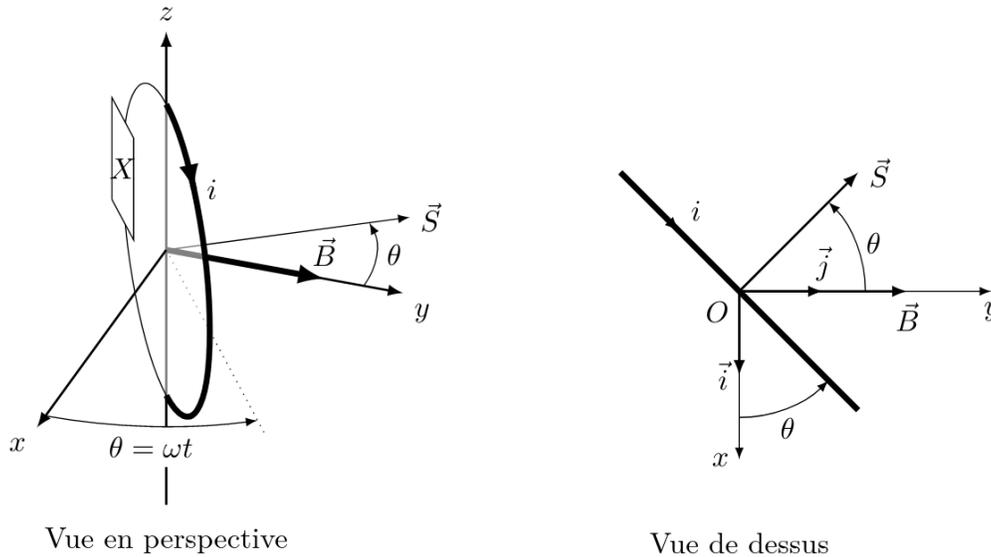


FIGURE 4 – Représentation de la spire

Les grandeurs moyennes demandées seront rapportées à un tour

6. Expliquer par quel phénomène physique un courant électrique va circuler dans le circuit formé par la spire et le dipôle X .

Lorsque la spire tourne, le flux du champ magnétique qui la traverse varie, ce qui provoque une fem induite dans la spire et donc un courant induit qui va circuler dans le dipôle X [1]

7. Exprimer le flux du champ magnétique \vec{B} à travers la spire en fonction de l'angle θ .

Le flux du champ magnétique à travers la spire est $\phi = BS \cos(\theta)$ [1]

8. En déduire l'expression de la force électromotrice induite dans la spire en fonction du temps.

La fem induite dans la spire est $e = -\frac{d\phi}{dt} = BS\omega \sin(\omega t)$ [1]

Le dipôle X est un conducteur ohmique de résistance R .

9. Déterminer le courant i qui va traverser R en fonction de B , ω , S , R et t .

L'intensité i qui traverse la résistance est $i = e/R$ donc $i = \frac{BS\omega \sin(\omega t)}{R}$ [1]

10. Donner l'expression de la puissance P_j dissipée par effet Joule et donner sa valeur moyenne $\langle P_j \rangle$.

La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance est $P_j = Ri^2$ de valeur moyenne $\langle P_j \rangle = \frac{(BS\omega)^2}{2R}$

11. Montrer que la vibration de la dalle devra exercer un couple moteur Γ_m sur la spire pour maintenir la vitesse de rotation constante (on négligera tout frottement). Quelle sera la puissance moyenne $\langle P_m \rangle$ de ce couple moteur?

Si la vitesse de la spire est constante, alors d'après le théorème du moment cinétique, la somme des moments des forces qu'elle subit est nulle donc $\Gamma_L + \Gamma_m = 0$ avec Γ_L le couple des forces de Laplace et Γ_m le couple moteur, projetés sur l'axe \vec{e}_z . On a $\Gamma_L = (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z = -iBS \sin(\omega t)$ donc le couple exercé par le moteur est :

$$\Gamma_m = iBS \sin(\omega t) = \frac{(SB)^2 \omega \sin^2(\omega t)}{R} \geq 0$$

Le couple exercé par le moteur est toujours positif, donc c'est un couple moteur. La puissance du couple moteur est $P_m = \Gamma_m \omega$, donc la puissance moyenne est :

$$\langle P_m \rangle = \frac{(BS\omega)^2}{2R}$$

12. Montrer que l'ensemble de la puissance mécanique fournie est transformée en puissance électrique qui est dissipée par effet Joule.

On trouve comme on pouvait s'y attendre que la puissance moyenne fournie par le moteur est identique à la puissance moyenne dissipée par effet Joule. Comme la vitesse de rotation est constante, la totalité de la puissance fournie par le moteur est dissipée par effet Joule. [1pt]

Le dipôle X est maintenant un condensateur de capacité C , la résistance de la spire étant toujours négligée. On suppose qu'à $t = 0$ le condensateur est déchargé.

13. Déterminer le courant dans le circuit en fonction de B , ω , S , C et t .

On a maintenant $i = C \frac{de}{dt}$, soit :

$$i(t) = BSC\omega^2 \cos(\omega t)$$

14. Est-il nécessaire d'exercer un couple mécanique sur la spire pour maintenir une vitesse de rotation *moyenne* constante?

Dans ces conditions, le couple des forces de Laplace qui s'exercent sur la spire est

$$\Gamma_L = iBS \sin(\omega t) = (BS)^2 C \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

dont la valeur moyenne est nulle.

[2pt]

Il ne faudra donc pas exercer de couple mécanique sur la spire pour garder sa vitesse de rotation moyenne constante.

15. Déterminer la puissance électrique instantanée $P_C(t)$ reçue par le condensateur en fonction de B , ω , S , C et t . Calculer la valeur moyenne $\langle P_C(t) \rangle$ de cette puissance.

La puissance instantanée est :

$$P_c = ei = (BS)^2 \omega^3 C \cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{1}{2} (SB)^2 \omega^3 C \sin(2\omega t)$$

[/1pt] La valeur moyenne de cette puissance est nulle

[/1pt]

1.3 Puissance électrique reçue par les LED

Le mouvement de translation de la dalle, de vitesse \dot{x} , entraîne la rotation de la roue schématisée sur la figure 3. On admet que sa vitesse angulaire de rotation s'exprime $\Omega = \gamma \dot{x}$, avec γ le rapport de transmission. L'énergie cinétique de la roue est par la suite convertie en énergie électrique au moyen d'une génératrice, servant alors à éclairer un réseau de LED disposées sur la partie supérieure des dalles. On modélise dans un premier temps la génératrice par l'association série d'un générateur de force électromotrice (fem) $u = K_t \Omega$, d'une résistance R et d'une inductance propre L . On s'intéresse à la puissance débitée par ce dipôle dans le réseau de LED, assimilé à une résistance de charge R_L (voir figure 5).

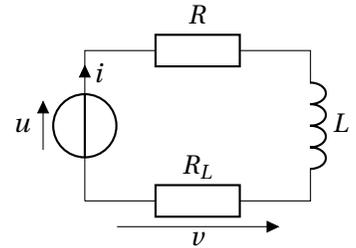


FIGURE 5 – Circuit électrique équivalent

16. Donner sans démonstration l'expression de l'impédance complexe d'un conducteur ohmique de résistance R , puis d'une bobine idéale d'inductance propre L en fonction de la pulsation d'excitation du circuit ω .

$$\underline{Z}_R = R \text{ et } \underline{Z}_L = jL\omega$$

[/1]

17. La pulsation ω étant celle imposée par les pas du danseur, estimer son ordre de grandeur.

La fréquence d'un danseur est de 1 à 3 pas par secondes, soit une pulsation d'environ 5 rad/s à 20 rad/s.

[/1]

18. Sachant que $R = 19,2 \Omega$, justifier l'approximation proposée ci-dessous par le constructeur :

Le module de l'impédance de l'inductance de 1,67 mH pour 3 pas par secondes est inférieur à $0,04 \Omega$, quasiment 3 ordres de grandeur inférieur à la résistance $R = 19,2 \Omega$. [/1]

Réponse acceptée (même s'il est interdit de comparer les imaginaires avec les réels) :

l'impédance totale du circuit correspond environ à celle obtenue sans inductance $\underline{Z} = R + R_L + jL\omega \simeq R + R_L$, ce qui donne sens au document du constructeur qui affirme que l'impédance du circuit est négligée à cause des faibles fréquences [/1]

Réponse correcte :

Si la tension vérifie $u = U_0 \cos(\omega t)$, le courant vérifie $i = \frac{U_0}{R + R_L} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \cos(\omega t - \arctan(\varepsilon))$ avec $\varepsilon = \frac{L\omega}{R + R_L}$

Comme $\varepsilon \ll 1$, on approxime la réponse en courant par $i \simeq \frac{U_0}{R + R_L} \cos(\omega t)$, solution obtenue sans inductance.

Cela revient à faire une erreur inférieure à 0,001 % sur l'amplitude et une erreur de déphasage temporel de moins de 0,1 ms sur le signal, environ 0,01% de la période. [bonus]

L'excitation de la dalle produite par le danseur n'est certainement pas purement sinusoïdale. On peut imaginer que le système reçoive des harmoniques d'ordre supérieure. Pour une harmonique d'ordre 10 l'erreur d'amplitude est de 0.1% et de décalage temporel d'environ 1% de la période, on peut encore négliger l'impact de l'inductance. [bonus]

De manière générale, si l'essentiel du spectre du signal est inférieur à $f_c = R/(2\pi L) \simeq 2 \text{ kHz}$, l'inductance a un effet négligeable sur le courant circulant dans le circuit. [bonus]

Document 2.

Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club, IEEE Industry Applications Magazine, 2011 : The armature winding inductance ($L = 1,67 \text{ mH}$) has been neglected because of the low excitation frequency of the system.

19. Dans le cadre de l'approximation précédente, proposer un schéma électrique équivalent puis exprimer la tension v aux bornes de la résistance R_L en fonction de u , R et R_L .

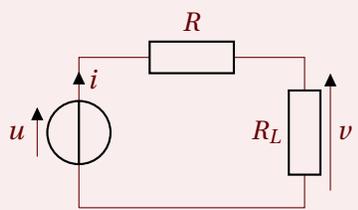


Schéma : [/1]

En négligeant l'inductance, on obtient la tension v par simple application du pont diviseur de tension $v = \frac{R_L}{R + R_L} u$ [/1]

20. Dédurre de la question précédente que la puissance électrique instantanée $P_L(t)$ reçue par le réseau de LED peut s'écrire :

$$P_L(t) = A [K_t \gamma \dot{x}(t)]^2,$$

avec A un facteur à exprimer en fonction de R et R_L uniquement.

La puissance reçue par la LED vaut par définition $P_L(t) = vi$ soit par application de la loi d'Ohm, $P_L(t) = v^2/R_L$ soit $P_L(t) = \frac{R_L}{(R + R_L)^2} [K_t \gamma \dot{x}(t)]^2$ par application de la question précédente et du fait que $u(t) = K_t \gamma \dot{x}(t)$ d'après l'énoncé. On en déduit $A = \frac{R_L}{(R + R_L)^2}$ par identification. [/1]

La génératrice concède des pertes au cours de son fonctionnement. Son rendement connu et constant est défini par

$$\eta = \frac{P_u(t)}{P_p(t)} \quad (0 < \eta < 1)$$

où $P_u(t)$ et $P_p(t)$ désignent respectivement la puissance instantanée fournie par la fem et la puissance instantanée prélevée par la génératrice à la dalle mobile.

21. Exprimer $P_u(t)$ en fonction de $K_t, \gamma, R, R_L, \dot{x}$ et η .

$$P_u(t) = ui = u^2/(R + R_L) \text{ soit } P_u(t) = \frac{[K_t \gamma \dot{x}(t)]^2}{R + R_L} \quad [/1]$$

22. Justifier de manière argumentée que cette puissance prélevée se traduit, d'un point de vue de la dalle, par une force de frottement de la forme $\vec{F}_\alpha = -\alpha \vec{v}$ (voir partie 1.1), avec :

$$\alpha = \frac{(K_t \gamma)^2}{\eta(R + R_L)}$$

La puissance mécanique prélevée à la dalle par la génératrice est de la forme $P_p(t) = \frac{[K_t \gamma]^2}{\eta(R + R_L)} \dot{x}^2$, [/1]

opposé à la puissance fournie par la génératrice à la dalle $-\frac{[K_t \gamma]^2}{\eta(R + R_L)} \dot{x}^2$. [/1]

La force mécanique exercée par la génératrice à la dalle \vec{F}_α fourni donc une puissance $\vec{F}_\alpha \cdot \vec{v} = -P_p(t) = -\alpha \dot{x}^2$. On identifie la constante au α de l'énoncé et la force s'écrit bien $\vec{F}_\alpha = -\alpha \vec{v}$. [/1]

23. On donne $\eta = 50\%$, $K_t = 7,28 \times 10^{-2} \text{ N.m.A}^{-1}$. En prenant $R_L = 150 \Omega$ et $\gamma = 2,2 \times 10^4 \text{ rad.m}^{-1}$, calculer la valeur de α . Sachant que $D = 10 \text{ N.s.m}^{-1}$, justifier le commentaire du constructeur reporté ci-dessous :

AN : $\alpha = 3 \times 10^4 \text{ N.s.m}^{-1}$. On en conclue que $\alpha \gg D$, [/1]

soit un amortissement $z = 1/2Q = (D + \alpha)/\sqrt{4km} \approx \alpha/\sqrt{4km}$ (cf partie 1.1), indépendant de D . [/1]

C'est en accord avec le document où l'amortissement "mécanique", sous entendu propre à la conception mécanique de la dalle égal à $D/\sqrt{4km}$, est négligeable devant l'amortissement produit par la génératrice en fonctionnement égal à $\alpha/\sqrt{4km}$. [/1]

Document 3.

Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club, IEEE Industry Applications Magazine, 2011 :
When energy is generated for lighting, the damping* of the system is determined by the dc generator and its electrical load.
In that case, the mechanical damping may be neglected. *damping : amortissement

1.4 Forçage sinusoïdal

On teste à présent le système au plus proche de ses conditions réelles d'utilisation. Un expérimentateur danse sur la dalle et exerce sur elle une force \vec{F} , dont la norme est mesurée au moyen d'un capteur de force placé sur celle-ci (voir figure 6). Le signal obtenu montre qu'en dansant, l'expérimentateur reste à tout instant en contact avec la dalle. On modélise ce signal de manière approximative par l'équation :

$$F(t) = F_0 + F_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

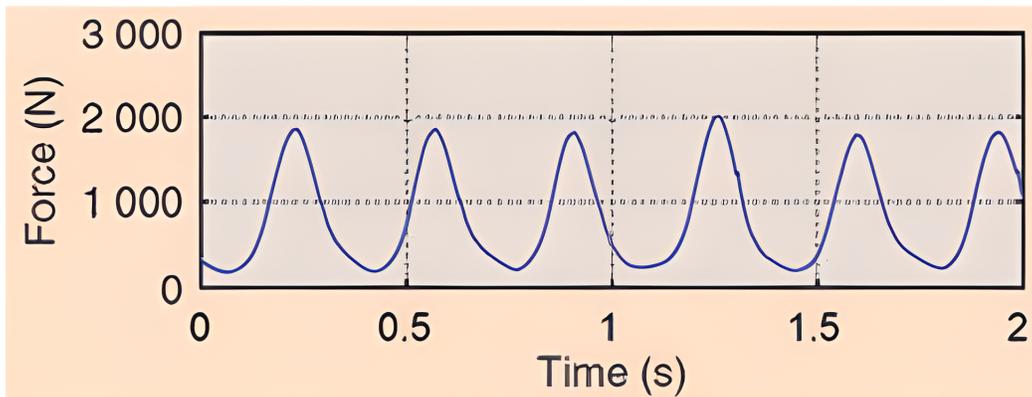


FIGURE 6 – Évolution expérimentale de la force F exercée par le danseur (de masse 83 kg) sur la dalle au cours du temps (Energy Floors®).

24. Estimer la valeur des coefficients de modélisation F_0 , F_1 et ω pour le signal représenté sur la figure 6.

On dénombre, sur la figure 6, 6 oscillations en 1,7 secondes soit une pulsation d'environ 22 rad/s. [/1]
 F_0 est la valeur moyenne du signal qu'on estime à 1 kN, et F_1 est l'amplitude du signal qu'on estime à 0,9 kN. [/1]
 F_0 est environ le poids du {danseur + dalle}. [/bonus]

En redéfinissant X comme l'écart entre la position de la dalle et sa position d'équilibre atteinte lorsque le danseur est immobile, l'équation du mouvement de la dalle peut s'écrire :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{F_1}{m} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et } Q = \frac{\eta(R + R_L)\sqrt{km}}{(K_t\gamma)^2}$$

On rappelle la valeur des paramètres mécaniques : $m = 35$ kg, $k = 1,5 \times 10^5$ N.m⁻¹. En régime établi, la solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \psi)$$

On lui associe la grandeur complexe $\underline{X}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \psi)}$ telle que $X(t) = \text{Re}(\underline{X}(t))$.

25. Déterminer l'expression de l'amplitude X_0 des oscillations de la dalle en fonction de ω_0 , Q , m , ω et F_1 .

La dalle est un système passe bas d'ordre 2 en régime sinusoïdale forcé, dont les solutions se déterminent en passant en notations complexes. [1]

En injectant la solution $\underline{X}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \psi)}$ dans l'équation et en remplaçant le terme de forçage par $\frac{F_1}{m} e^{j\omega t}$, on obtient l'équation devant être valable à tout temps : [1]

$$X_0 e^{j\psi} = \frac{\frac{F_1}{m\omega_0^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

En prenant la valeur absolue de cette expression on obtient l'amplitude X_0 (l'amplitude étant définie positive $|X_0| = X_0$ et $|F_1| = F_1$) : [1]

$$X_0 = \frac{\frac{F_1}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

26. Exprimer l'amplitude de vitesse V_0 de la dalle en fonction de X_0 et ω .

En dérivant l'expression $X(t) = X_0 \cos(\omega t + \psi)$ on obtient la dérivée temporelle de l'écart de la dalle par rapport à sa position d'équilibre. L'écart étant la position de la dalle à un facteur près, la dérivée permet d'obtenir la vitesse de la dalle $V(t) = \omega X_0 \cos(\omega t + \psi + \pi/2)$, d'amplitude $V_0 = \omega X_0$. [1]

En utilisant les résultats des parties précédentes, il est possible de montrer (non demandé) que la moyenne temporelle de la puissance fournie aux LED s'exprime :

$$\langle P_L \rangle = \frac{R_L(\eta F_1 K_t \gamma)^2}{2(K_t \gamma)^4 + 2km \left[\eta(R + R_L) \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^2} \quad (1)$$

Dans la suite, on s'intéresse à l'influence de l'un des paramètres suivants, ω , γ ou RL , sur la puissance moyenne récupérée $\langle P_L \rangle$, les autres paramètres étant maintenus constants.

27. Analyser les comportements asymptotiques de $\langle P_L \rangle$ aux basses et aux hautes fréquences. Déterminer, littéralement puis numériquement, la pulsation ω pour laquelle $\langle P_L \rangle$ est maximale, ainsi que l'expression littérale de la puissance moyenne récupérée maximale notée $\langle P_L \rangle_{\max}$. Tracer alors l'allure qualitative de $\langle P_L \rangle$ en fonction de ω .

Le terme $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ tend vers $+\infty$, c'est à dire donc $\langle P_L \rangle \rightarrow 0$, quand $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$. [1]
 $\langle P_L \rangle(\omega)$ étant positive, continue et dérivable, elle passe au moins par un maximum sur \mathbb{R}_+^* (Thm Rolle). Cherchons à annuler la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \frac{a}{b + c(x - 1/x)^2}$ sur \mathbb{R}_+^* , avec a, b et c des constantes, pour en trouver un extrémum.

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) \\ \Leftrightarrow 0 &= a(b + c(x - 1/x)^2)' \\ \Leftrightarrow 0 &= 2ac(1 + 1/x^2)(x - 1/x) \end{aligned}$$

Les solutions mathématiques de cette équation sont donc $\{-i, +i, 1, -1\}$ et uniquement $\{1\}$ sur \mathbb{R}_+^* qui est un maximum. Par identification de $f(x)$ à la fonction $\langle P_L \rangle(\omega)$, le maximum est en $x = 1$ soit $\omega = \omega_0$. [1]

On en déduit :

[/1]

$$\langle P_L \rangle_{\max} = \frac{R_L}{2} \left(\frac{\eta F_1}{K_t \gamma} \right)^2$$

Ce système a été testé en 2015 dans l'émission scientifique télévisée On n'est pas que des cobayes, à l'occasion de la Fête de la Science. Deux équipes, composées chacune de deux danseurs et deux danseuses, s'affrontent sur la piste de danse, avec pour objectif de générer le maximum d'énergie électrique pendant une durée fixée (30 secondes environ) :

- l'équipe 1 danse sur un morceau de salsa, de tempo 115 battements/min;
- l'équipe 2 danse sur un morceau de disco, de tempo 125 battements/min.

28. En faisant l'hypothèse que les deux équipes ont même masse totale et dansent de la même façon, quelle équipe a selon vous gagné ce duel, en vous fiant aux résultats établis aux questions précédentes?

La fréquence $f_0 = \omega_0/2\pi \approx 2$ kHz étant nettement supérieure à la fréquence des pas de l'équipe 1 $f_1 = 115/60 \approx 1,92$ Hz et de l'équipe 2 $f_2 = 125/60 \approx 2,08$ Hz, on a $f_1 < f_2 \ll f_0$. Comme $\langle P_L \rangle(f)$ est une fonction croissante de f sur $]0, f_0[$ (un seul maximum sur \mathbb{R}_+^* en $f = f_0$), c'est a priori l'équipe 2 qui gagnera le duel : en effet, l'énergie récupérée pour une durée $\Delta t = 30$ min de l'équipe 2 vérifiant $\langle P_L \rangle(f_2)\Delta t$ est supérieure à celle de l'équipe 1 $\langle P_L \rangle(f_1)\Delta t$. [/1]

Il faut cependant des conditions d'excitation de la dalle similaires, notamment une amplitude de force F_1 similaire ce qui ne semble pas évident pour des danses et danseurs différents [bonus]

Dans les questions suivantes, on considère que la pulsation ω imposée par le danseur est fixée. Le graphique 3D ci-dessous, fourni par le constructeur, montre que la puissance de sortie dépend fortement du rapport de transmission γ et de la résistance de charge R_L .

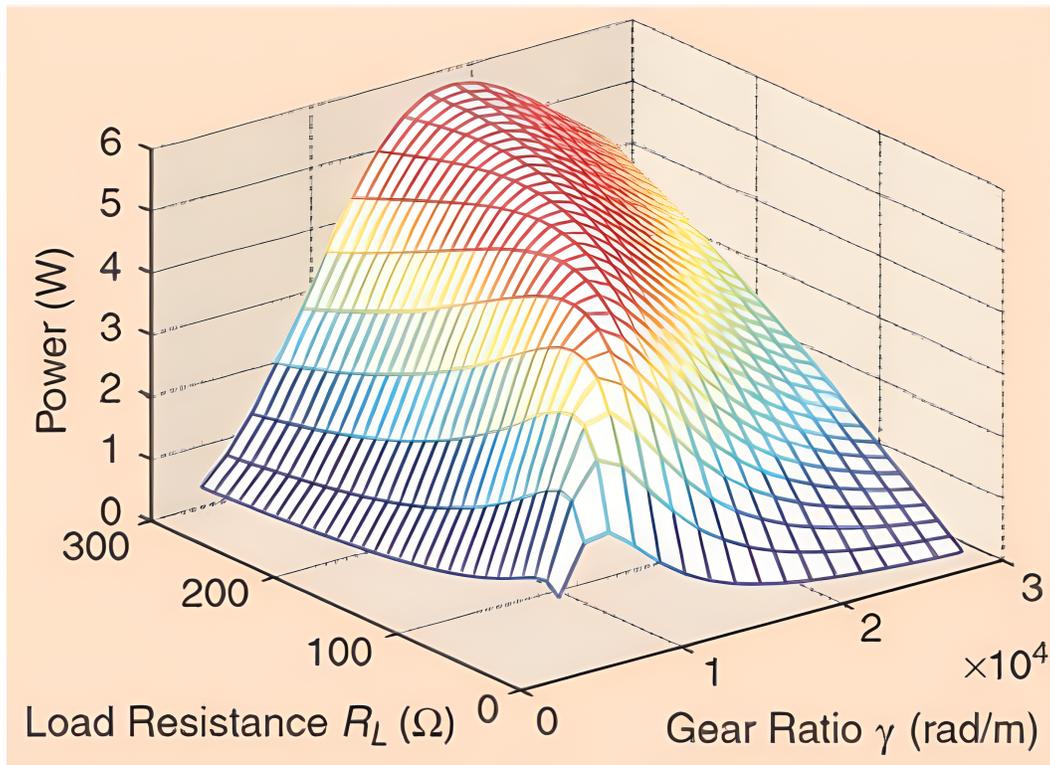


FIGURE 7 – Évolution de la puissance électrique de sortie en fonction du rapport de transmission et de la résistance de charge (Energy Floors®).

29. En exploitant l'expression (1) de la puissance moyenne, tracer, en la justifiant, l'allure qualitative de $\langle P_L \rangle$ en fonction de γ , les paramètres ω et R_L étant fixés.

$$\langle P_L \rangle(\gamma) \sim \gamma^2 \text{ pour } \gamma \rightarrow 0 \text{ et } \langle P_L \rangle(\gamma) \sim 1/\gamma^2 \text{ pour } \gamma \rightarrow +\infty.$$

[/1]

30. De la même manière, tracer, en la justifiant, l'allure qualitative de $\langle P_L \rangle$ en fonction de R_L , les paramètres ω et γ étant fixés.

$$\langle P_L \rangle(R_L) \sim R_L \text{ pour } R_L \rightarrow 0 \text{ et } \langle P_L \rangle(R_L) \sim 1/R_L \text{ pour } R_L \rightarrow +\infty.$$

[/1]

31. Confrontez vos prédictions d'évolution de $\langle P_L \rangle$ avec la figure 7.

On observe chacun des comportements décrit pour des coupes différentes de la figure. Il faut se placer sur les bords du fond de la figure pour repérer les évolutions quand R_L et γ sont proches de 0 car le pas de discrétisation empêche une bonne lecture. Impossible de savoir si les lois de puissance sont bien vérifiées cependant n'ayant pas d'échelle de couleur précise (version imprimée noir et blanc).

[/1]

32. Quel jeu de valeurs (γ, R_L) proposeriez-vous pour dimensionner ce système? Justifier.

Si on se réfère à la figure 7, le maximum de puissance de sortie est obtenu pour une résistance de charge de 300Ω et un rapport de transmission de $1,8 \times 10^4 \text{ rad.m}^{-1}$. Les valeurs de $R_L = 150 \Omega$ et $\gamma = 2,2 \times 10^4 \text{ rad.m}^{-1}$ données à la question 23 sont d'ailleurs proches en ordre de grandeur.

[/1]

2 Rendre l'eau potable

Plusieurs possibilités s'offrent au randonneur pour purifier l'eau de source trouvée en chemin, afin de pouvoir la consommer sans danger pour la santé. Il opte pour la solution d'alcool iodé.

2.1 Étude du diiode

A température et pression ordinaire, le diiode est un cristal de couleur violette donc la maille conventionnelle est, en première approximation, cubique face centrées cfc.

33. Représenter la maille conventionnelle d'une structure cfc. Quel est le nombre de motifs appartenant en propre à la maille conventionnelle cfc?

Voir cours pour la représentation

[2pt] 4 motifs par maille

[/1pt]

34. Quelle est la coordinence du diiode pour une telle structure cristalline?

Coordinence 12

[/1pt]

La solubilité de diiode $I_2(s)$ dans l'eau pure à 25°C est $s = 0,330 \text{ g.L}^{-1}$.

35. Déterminer la concentration $[I_2(aq)]$ dans une solution saturée de diiode et la valeur numérique du produit de solubilité K_s de I_2 à 25°C . La masse molaire de l'iode est $M(I) = 126,9 \text{ g.mol}^{-1}$.

On a l'équilibre $I_2(s) \rightleftharpoons I_2(aq)$. Ainsi $K_s = [I_2(aq)]/c^0$

[/1pt] Dans la solution saturée :

$$[I_2(aq)] = \frac{s}{M(I_2)} = 1,3 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

[/1pt]

2.2 Traiter l'eau

Document 1: Comment rendre l'eau potable? (d'après le site routard.com)

Quels sont les différents moyens dont un voyageur dispose pour traiter son eau?

1. Ébullition

Selon les différents avis, il faut faire bouillir l'eau d'une à dix minutes. L'ébullition permet de désinfecter l'eau avant de la boire mais pas de la stériliser.

En altitude, n'oubliez pas que l'eau bout à une température plus basse et que les germes ont donc plus de chance de résister. Il est donc vivement conseillé de traiter votre eau ou de la filtrer.

2. Désinfection chimique

Les désinfectants chimiques du voyageur sont efficaces sur les bactéries. Parmi eux, certains éliminent également les virus et les parasites. Ils doivent toujours être utilisés avec une eau bien claire. Il est essentiel d'attendre un délai suffisant avant de la boire, de 15 minutes à 2 heures selon le produit utilisé.

Les différents désinfectants :

Le plus efficace est l'iode, disponible en France en pharmacie sous forme d'alcool iodé à 2 %. On l'utilise à dose de 5 à 10 gouttes par litre d'eau selon la turbidité (aspect trouble de l'eau) et avec un temps de contact de 30 minutes. Son utilisation doit pourtant rester ponctuelle, l'utilisation prolongée présentant un risque pour la thyroïde. Il existe aussi des résines iodées qui équipent certains systèmes pour le voyageur.

Les autres désinfectants de l'eau disponibles sont des agents dérivés du chlore. Le problème avec les agents chlorés, c'est que leur efficacité dépend beaucoup du pH de l'eau, ce que le voyageur ne peut contrôler.

Par ailleurs, tous ces désinfectants chimiques, alcool iodé et agents chlorés, ont une efficacité qui diminue lorsque l'eau est froide (<10°C). Il faut alors doubler le temps de contact.

3. Filtrage

Une micro-filtration de porosité absolue entre 0,2 et 0,4 µm arrêtera efficacement les bactéries et les parasites mais pas les virus, qui sont trop petits. Un avantage de ce procédé, c'est que l'eau peut être consommée immédiatement.

Document 2: D'après le guide « Antiseptiques et désinfectants » du centre de Coordination de la Lutte contre les Infections Nosocomiales de l'Inter-région Paris - Nord

Les produits iodés sont bactéricides, virucides, fongicides et sporicides.

L'iode sous forme moléculaire (le diiode, I₂) est capable de traverser rapidement la membrane cellulaire. Son action est due à son pouvoir oxydant, comme les autres halogénés, sur les protéines enzymatiques et membranaires.

Les produits iodés sont stables entre pH=1 et pH=6.

Les matières organiques (protéines, sérum, sang ...) diminuent l'activité des dérivés iodés.

Document 3: Alcool iodé à 1% (d'après la fiche de l'agence nationale de sécurité du médicament)

La préparation satisfait à la monographie Préparations liquides pour application cutanée (0927).

Définitions

1. Formule

Composants	Quantités (g)	Fonction	Référentiel
Diiode	1,00	Substance active	Ph. Eur
Potassium (iodure de)	0,60	Solvant	Ph. Eur
Éthanol à 96% en volume	54,7	Excipient	Ph. Eur
Eau purifiée q.s.p.	100,0	Excipient	Ph. Eur

"q.s.p." signifie que l'on ajoute la quantité d'eau purifiée nécessaire pour obtenir 100,0 g d'alcool iodé.

Dans le cas d'utilisation d'éthanol à 90% en volume, il convient de se référer au texte général Alcoométrie de la Pharmacopée française.

2. Teneur

Diiodure libre (I_2) : de 0,95% en masse à 1,05% en masse. Iodure de potassium (K^+ , I^-) : de 0,57% en masse à 0,63% en masse

Production (quantités du tableau)

- Précaution : utilisez des récipients de verre pour la préparation.
- Dissolvez l'iodure de potassium puis le diiodure dans 5 mL d'eau purifiée; agitez et ajoutez la quantité d'alcool indiquée. Complétez avec l'eau purifiée.

Caractères :

- Aspect : liquide limpide brun foncé
- Odeur d'éthanol et d'iode.

36. On souhaite préparer la solution d'alcool iodé en suivant le descriptif du document 3. Préciser le matériel le plus adapté à utiliser pour :

- Obtenir les 5 mL d'eau purifiée
- Préparer les quantités adéquates de diiodure solide et d'iodure de potassium.

L'eau purifiée doit être introduite avec précision : on utilise une **pipette jaugée**. Les solides sont pesés dans une **coupelle** à l'aide d'une spatule et d'une balance de précision. [/1pt]

37. Le processus de désinfection de l'eau repose sur des réactions chimiques. Quelle est la nature de ces réactions chimiques d'après les documents 1 et 2? On ne demande pas d'équation bilan de réaction.

D'après les documents, les réactions de purifications sont des réactions d'oxydo-réduction. Doc 2 : "Pouvoir oxydant" et doc 1 : chlore et iode, deux espèces redox [/1pt]

38. Expliquer pourquoi il y a un délai entre l'utilisation du désinfectant et le moment où l'on peut consommer l'eau. Ce délai s'allonge lorsque la température diminue. Sur quel paramètre la température joue-t-elle?

Il est nécessaire d'attendre un délai suffisant car la réaction est sûrement une réaction lente. La température joue sur la valeur de la **constante d'équilibre** de la réaction. [/1pt]

39. On parle de "pouvoir oxydant" dans le document 2. Justifier cette affirmation à l'aide de la notion de nombre d'oxydation. On s'intéressera au couple I_2 / I^- .

Plus le nombre d'oxydation d'une espèce est grand, plus son pouvoir oxydant est fort [/1pt]. Dans le cas des espèces I_2 et I^- , on a $n.o.(I_2) = 0$ et $n.o.(I^-) = -1$. **L'oxydant est donc I_2** (n.o. plus grand) d'où l'affirmation "son action est due à son pouvoir oxydant" [/1pt]

On s'intéresse maintenant au dosage du diiodure.

Document 4: Alcool iodé à 1% (d'après la fiche de l'agence nationale de sécurité du médicament). Deuxième extrait.

Dans une fiole conique, introduisez 10,00 g d'alcool iodé. Ajoutez 20 mL d'eau et 1 mL d'acide sulfurique dilué. Titrez par le thiosulfate de sodium $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ en présence de solution d'amidon.

1 mL de thiosulfate de sodium $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ correspond à 12,69 mg de diiodure.

Teneur (en g pour 100 g) en diiodure :

$$\frac{V \times C \times 12,69}{m}$$

- V : volume versé en mL de thiosulfate de sodium $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$
- C : titre exact de thiosulfate de sodium $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$

— m : prise d'essai d'alcool en grammes

Document 5: Données

Formules chimiques :

- Diiode I_2 , solide ou en solution aqueuse
- Iodure de potassium KI solide ou (K^+, I^-) en solution aqueuse.
- Thiosulfate de sodium $Na_2S_2O_3$ solide ou $(2Na^+, S_2O_3^{2-})$ en solution aqueuse.
- Solution d'acide sulfurique H_2SO_4

Masse molaire de l'iode $M(I) = 126,9 \text{ g.mol}^{-1}$ Masse volumique de l'eau liquide $\mu_{\text{eau}} = 1 \text{ kg.L}^{-1}$

La solution d'amidon est bleue en présence de diiode et incolore sinon.

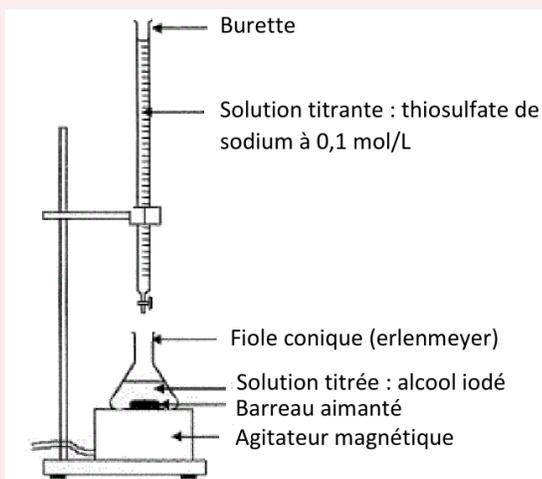
Potentiels standard d'oxydo-réduction à 25 °C :

- $E^0(I_2 / I^-) = 0,62 \text{ V}$
- $E^0(S_4O_6^{2-} / S_2O_3^{2-}) = 0,08 \text{ V}$

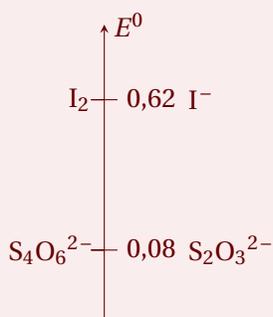
Volume moyen d'une goutte de solution aqueuse $V_g = 0,05 \text{ mL}$.

40. Faire un schéma annoté du dosage avec la verrerie utilisée. Où met-on la solution d'alcool iodé? Où met-on la solution de thiosulfate de sodium?

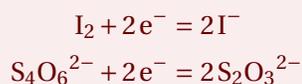
La solution d'alcool iodé est la solution titrée, elle se situe dans la **fiolle conique** (erlenmeyer) [1pt]. Le thiosulfate de sodium est la solution titrante, elle est placée dans la **burette** [1pt].
Schéma [2pt] :



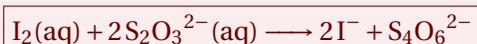
41. Dans l'alcool iodé, la substance qui réagit lors du dosage est le diiode. Écrire la réaction de dosage. Justifier qualitativement que cette réaction est totale.



Demi-équations redox (1pt) :



La réaction de dosage est donc (1pt) :



La constante d'équilibre de la réaction est définie par (1pt) :

$$K = 10^{\frac{2}{0,06}(E_1^0 - E_2^0)} = 10^{\frac{2}{0,06}(0,62 - 0,08)} = 10^{18} \gg 10^3$$

La réaction peut donc être considérée comme (quasi) totale (1pt)

42. Comment l'équivalence du dosage est-elle repérée dans le protocole présenté dans le document 4, page 12? Décrire en justifiant ce que l'on voit.

Le dosage est réalisé en présence d'amidon. La solution d'amidon est bleue en présence de diiode et incolore sinon. A l'état initial, la solution dans la fiole est bleue car il y a présence de diiode dans la solution titrée. A l'équivalence, tout le diiode aura été consommé : la solution va se décolorer. [1pt]

43. Établir le lien entre la quantité de matière $n(I_2)$ de diiode présent dans la masse m d'alcool iodé dosé, le volume V' (en litres) de solution de thiosulfate de sodium versé à l'équivalence du dosage et la concentration C de la solution de thiosulfate de sodium.

A l'équivalence, les réactifs sont introduits dans des proportions stœchiométriques et sont entièrement consommés (1pt) : il y a changement de réactif limitant. On a alors :

$$\frac{n(I_2)}{1} = \frac{n(S_2O_3^{2-})}{2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{n(I_2)}{1} = \frac{CV'}{2}} \quad (1pt)$$

44. Donner l'expression de la masse m' de diiode présent dans la masse m dosée en fonction de $n(I_2)$ et de $M(I)$, la masse molaire de l'iode.

On peut écrire $m' = n(I_2)M(I_2) = 2n(I_2)M(I)$ (1pt)

45. Montrer avec soin que l'on retrouve l'expression de la teneur en diiode annoncée dans le document 4, page 12. On rappelle que la teneur correspond à un pourcentage.

Définition de la teneur massique en pourcentage :

$$t = \frac{m'}{m} \times 100 = 100 \frac{2n(I_2)M(I)}{m} = 100 \frac{2CV'M(I)}{2m}$$

Avec $M(I) = 126,9 \text{ g.mol}^{-1}$, C en mol.L^{-1} , V' en L soit V (en mL) $= V' \cdot 10^{-3}$ et m en g on en déduit :

$$\boxed{t = 100 \frac{C \times V \cdot 10^{-3} \times 126,9}{m} = \frac{C \times V \times 12,69}{m}} \quad (2pt)$$

Lors du dosage d'une solution d'alcool iodé utilisée pour la désinfection, selon le protocole du document 4, on obtient un volume équivalent de thiosulfate de sodium de 10,1 mL.

46. Quelle est la masse de diiode contenue dans la prise d'essai? On attend ici un résultat numérique avec deux chiffres significatifs.

Le protocole précise "1 mL de thiosulfate de sodium $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ correspond à 12,69 mg de diiode". Le volume versé à l'équivalence étant de 10,1 mL, on a donc une masse de $\boxed{12,69 \times 10,1 = 0,13 \text{ g}}$ (1pt) de diiode dans la prise d'essai.

47. Quelle masse approximative de diiode ingurgite-t-on lorsque l'on boit un litre d'eau dans laquelle on a mis une dizaine de gouttes de cet alcool iodé?

Dix gouttes représentent un volume de $10 \times 0,05 = 0,5$ mL. La solution étant principalement constituée d'eau, on peut considérer que les dix gouttes correspondent à une masse de 0,5 mg d'alcool iodé ($\mu_{\text{eau}} = 1 \text{ kg/L}$) (1pt). Or, cet alcool iodé contient 0,13 g de diiode soit une teneur de 1,3% (la masse de prise d'essai était de 10 g). On en déduit la masse de diiode présente dans les dix gouttes $m_{\text{I}_2} = 0,5 \times 1,3\% = 6,5 \mu\text{g}$ (1pt).

* * * fin du sujet * * *