

Pendule de torsion

19

Q1 TMC scalaire sur {hxe+masses} /1
 Ref galilien, O₃ axe fixe /1

$$J_{O_3} \frac{d\omega}{dt} = -\alpha \Theta$$
 /1

soit
$$\ddot{\Theta} + \frac{\alpha}{J_{O_3}} \Theta = 0$$

Oscillateur harmonique /1

Solutions : sans la forme

$$\Theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

ou
$$\Theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$
 mieux car $\Theta(t=0)=0$ /1

en $\Theta(0) = 0 = A$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{J_{O_3}}}$ /1

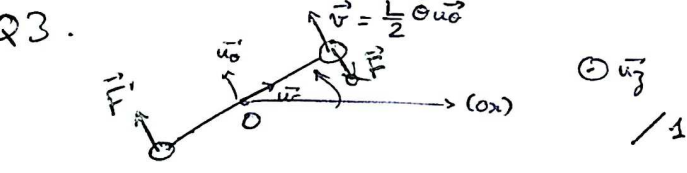
$\dot{\Theta}(0) = \dot{\Theta}_0 = B \omega_0$ /1

soit
$$\Theta(t) = \frac{\dot{\Theta}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$
 /1

Protocole pour déterminer α :

Faire osciller le pendule, mesurer la période. Répéter l'expérience en faisant varier les masses M. Tracer $ML^2/2$ en fonction de $(T/2\pi)^2$, le coef directeur sera α . /2

Q2 Période grande $\Rightarrow \alpha$ et ω_0 faibles /1
 Les forces de gravitation étant faibles, le couple $-\alpha \Theta$ ne l'être aussi. Pour observer une déviation Θ importante il faut α faible. /1



$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \omega \vec{u}_\theta \text{ et } \vec{F}' = \frac{1}{2} \omega \vec{u}_\theta$$
 /1

Le moment scalaire /O₃ résultant des forces de frottement (couple car $\vec{F} = -\vec{F}'$ et s'exercent à $\frac{L}{2}$ de O)

$$\Gamma_{/O_3} = \left(\frac{L}{2} \vec{u}_r \wedge \vec{F} - \frac{L}{2} \vec{u}_r \wedge \vec{F}' \right) \cdot \vec{u}_z$$
 /1

$$= -2 \left(\frac{L}{2} \right)^2 \omega$$

$$\Gamma_{/O_3} = -\frac{1}{2} L^2 \omega$$
 /1

TMC scalaire sur {hxe+masses}, Ref galilien, O₃ fixe

$$\ddot{\Theta} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{J_{O_3}} \dot{\Theta} + \frac{\alpha}{J_{O_3}} \Theta = 0$$
 /1

Si l'amortissement est très faible, le régime est quasi-périodique, et la période pseudo-période est alors très proche de la période propre, ce qui ne remet pas en question le protocole. /1

Q4. Les masses M' exercent un couple /O₃ :

$$\Gamma_{/O_3} = 2 \left(\frac{L}{2} \times \frac{GM M'}{d'^2} \right)$$
 /1

À l'équilibre $\dot{\Theta} = 0$ et $\ddot{\Theta} = 0$, ce couple s'oppose au couple de rappel à l'équilibre $-\alpha \Theta_e \vec{u}_z$:

$$2 \left(\frac{L}{2} \frac{GM M'}{d'^2} \right) = \alpha \Theta_e$$
 /1

On en déduit :

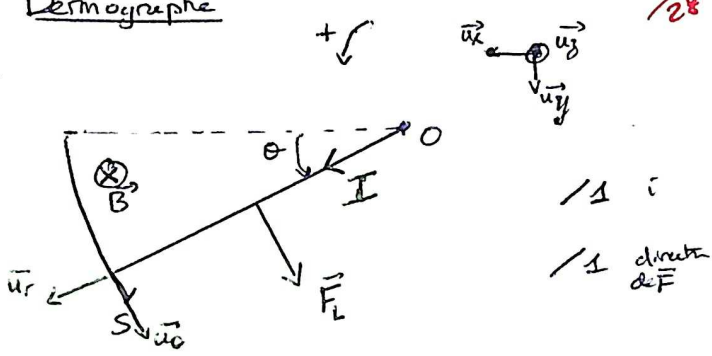
$$G = \frac{\alpha \Theta_e d'^2}{L M M'}$$
 /1

Q5. En plaçant un miroir attaché au pendule et en observant la déviation d'un rayon laser par ce miroir. Le système transforme une déviation angulaire en un déplacement significatif plus la distance d'observation du point laser est grande. /1

Tor /72

Dermographe

Q6.



/1
/1 direction de \vec{F}
/1 nom
/1 expression

\vec{F}_L : force de Laplace

$\vec{F}_L = I l B \vec{u}_0$

Q8. Couple de rappel : $\vec{\Gamma} = -K\theta \vec{u}_y$
Force de Laplace : $\vec{F}_L = I l B \vec{u}_0$
P poids et R support \rightarrow couple moments négligés

actions mécaniques sur la partie mobile /1

Q7. en $t=0^-$ il n'y a qu'un couple de rappel et la réaction de la partie $\Rightarrow \vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_y = 0$
 $\Rightarrow \theta = 0$

TTC scalaire /1

Q9. TTC scalaire sur $\{hze\}$ dans ref Galilée par rapport à O_3 fixe :

$J\ddot{\theta} = -K\theta + \frac{l}{2} \times (I l B)$ /1

demo de cours /1
expression /1

soit $\ddot{\theta} + \frac{K}{J} \theta = \frac{I l^2 B}{2J}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}}$ et $A = \frac{I l^2 B}{2J}$ /2

Q10. $I l B$ force, $l \times I l B$ moment d'une force
 $J\ddot{\theta}$ moment d'une force (par TTC)
 $\frac{l \times I l B}{J \cdot \ddot{\theta}}$ adimensionné $\Rightarrow A$ à la même dimension que $\ddot{\theta}$ /1

Q11. Solutions :
 $\theta(t) = \theta_A \cos(\omega_0 t) + \theta_B \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2}$ /1

En $t=0^-$, $\theta(0^-) = 0$. Si $\theta(0^+) \neq 0$, alors $\frac{d\theta}{dt}$ n'est pas défini (vitesse angulaire infinie) donc θ est continue et vaut $\theta(0^+) = 0$. /1
idem pour $\dot{\theta}(0^+) = 0$, la force appliquée ne peut être infinie $\Rightarrow \dot{\theta}$ continue car $\ddot{\theta}$ n'est pas ∞ . /1

Après l'expression de la solution

$\theta(0^+) = \theta_A + \frac{A}{\omega_0^2}$ /1

$\dot{\theta}(0^+) = -\theta_A \omega_0 \times 0 + \theta_B \omega_0 \times 1 + \frac{A}{\omega_0^2}$ /1

soit $\theta_A = -\frac{A}{\omega_0^2}$ et $\theta_B = 0$

$\theta(t) = \frac{A}{\omega_0^2} (1 - \cos(\omega_0 t))$

Q12. en $t=t_1$, $\theta(t_1^+) \geq \theta_S \Rightarrow \dot{\theta}(t_1) > 0$
 $\theta(t_1) = \theta_S$ (si = 0 le conducteur ne dépasse pas S.)

$\theta_S = \frac{A}{\omega_0^2} (1 - \cos(\omega_0 t_1))$ (1) /1
 $\frac{A}{\omega_0} \sin(\omega_0 t_1) > 0$ (2) /1

$t_1 = \frac{1}{\omega_0} \arccos\left(1 - \frac{\omega_0^2 \theta_S}{A}\right)$ /1
($\cos \omega_0 t_1 \in [0, \pi]$ d'après (2))

Q13. $\ddot{\theta} + \frac{K}{J} \theta = 0$ /1

$\theta(t') = \theta'_A \cos(\omega_0 t') + \theta'_B \sin(\omega_0 t')$ /1

$\theta(t'=0) = \theta_S = \theta'_A$
 $\dot{\theta}(t'=0) = \dot{\theta}(t_1) = \frac{A}{\omega_0} \sin(\omega_0 t_1) = \omega_0 \theta'_B$ /1

$\theta(t') = \theta_S \cos(\omega_0 t') + \frac{A}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 t_1) \sin(\omega_0 t')$ /1

Q15. t'_m tel que Cherchons $\dot{\theta}(t'_m) = 0$ (angle maximal atteint) nous avons $\theta(t'_m) = \theta_{096}$ rad

$\dot{\theta} = -\theta_S \omega_0 \sin(\omega_0 t'_m) + \frac{A}{\omega_0} \sin(\omega_0 t_1) \cos(\omega_0 t'_m) = 0$ /1

$\Rightarrow \cos(\omega_0 t'_m) = \frac{\theta_S \omega_0^2 \sin(\omega_0 t_1)}{A \sin(\omega_0 t_1)} \neq 0$

soit $\theta(t'_m) = \frac{\theta_S^2 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t_1)}{A \sin(\omega_0 t_1)} + \frac{A}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 t_1) \sin(\omega_0 t'_m)$

(1) $= \left(\frac{\theta_S^2 \omega_0^2}{A \sin(\omega_0 t_1)} + \frac{A \sin(\omega_0 t_1)}{\omega_0^2} \right) \sin(\omega_0 t'_m)$

$= \sin(\omega_0 t_1) \left[\frac{A}{\omega_0^2} (1 + \cos^2(\omega_0 t_1) - 2\cos(\omega_0 t_1)) + A(1 - \cos(\omega_0 t_1)) \right] \sin(\omega_0 t'_m)$

$= \frac{2A}{\sin(\omega_0 t_1) \omega_0^2} (1 - \cos(\omega_0 t_1)) \sin(\omega_0 t'_m) = \theta_S$

$\theta(t'_m) = \frac{2\theta_S \sin(\omega_0 t'_m)}{\sin(\omega_0 t_1)}$ /2

amplitude du mouvement de l'aiguille

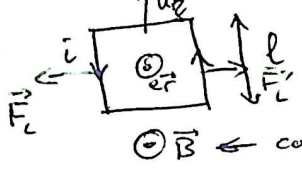
Q15. Portions de courbes sinusoïdales de même période, il n'y a que la courbe 1 qui vérifie cette observation. /1

Géométrie

1/25

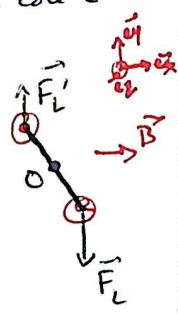
schéma / 1

Q16.



N spires de côté l

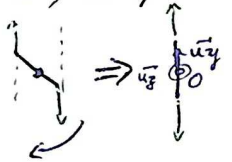
$\vec{B} \leftarrow \cos \vec{e}_x \parallel \vec{B}$



$$\begin{cases} \vec{F}_L = -Ni \times l \times B \vec{e}_y \\ \vec{F}'_L = Ni l B \vec{e}_y \end{cases}$$

Sans couple de rappel, le moment des forces de Laplace sont nuls à l'équilibre (seul moment, moment du poids et \vec{R} support négligés ou nuls).

La droite d'action des forces de Laplace passe donc par O, la spire est dans le plan (Oyz)



Q17.

$\vec{m} = Ni \vec{S}$ avec $\vec{S} = S \vec{e}_r$ / 1

$\vec{\Gamma}_{Laplace} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ / 1

$\vec{\Gamma}_{Laplace} = \vec{0}$ à l'équilibre $\Rightarrow \vec{m} \parallel \vec{B}$

(position $\vec{m} \parallel \vec{B}$ instable $\vec{m} \parallel \vec{B}$ stable) / 1

Donc \vec{S} suivant $\vec{e}_x \Rightarrow$ spire dans le plan (Oyz) idem Q16 / 1

Q18.

TMC scalaire aux N spires / O2 axe fixe dans un ref Galiléen.

$J \ddot{\theta} = -C(\theta - \frac{\pi}{2}) - \lambda \dot{\theta} - NiSB \sin(\theta)$ / 1

* En supposant θ proche de $\frac{\pi}{2}$, ($\theta' = \theta - \frac{\pi}{2} \ll 1$) / 1

$J \ddot{\theta}' + \lambda \dot{\theta}' + C \theta' = -NiSB$ $\cos(\theta') = 1$ à l'ordre 1 en θ' . / 1

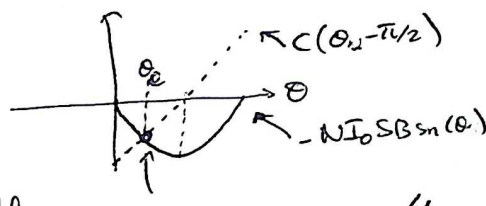
On obtient: $\begin{cases} a = \frac{\lambda}{J} \\ b = \frac{C}{J} \\ c = -\frac{NiSB}{J} \end{cases}$ / 1

* si non l'équation est non linéaire et ne peut pas être mis sous cette forme. / 1

Q19. À l'équilibre, le couple de rappel s'oppose au couple de Laplace.

$-C(\theta_2 - \pi/2) - NI_0 SB \sin(\theta_2) = 0$ / 1

soit θ_2 obtenu par résolution graphique:



* cas θ_2 faible / 1

$-C(\theta_2 - \frac{\pi}{2}) - NI_0 SB \theta_2 \approx 0$

$\Rightarrow \theta_2 \approx \frac{C\pi/2}{C + NI_0 SB}$

$C = 10^{-6} \frac{N \cdot m}{rad}$ $NI_0 SB = 2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ u.s.i}$

$\Rightarrow \theta_2 \approx \pi/2 \Rightarrow$ l'hypothèse d'un θ_2 faible n'est pas valable. / 1

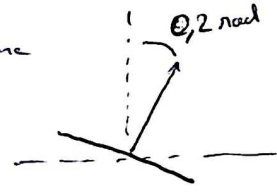
* cas θ_2 élevé (proche de $\pi/2$) / 1

$\sin(\theta_2) \approx 1$

et $\theta_2 \approx \frac{\pi}{2} - \frac{NI_0 SB}{C}$ $\frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}}$ / 1

l'hypothèse θ_2 proche de $\pi/2$ est cohérente / 1

On a donc



Par des faibles déviations angulaires $\theta - \pi/2$ $\theta_2 - \frac{\pi}{2}$ est proportionnel au courant ($\sin(\theta_2) \approx 1$) / 1

Un capteur linéaire est simple à établir. / 1

Q20. Impossible d'appliquer un échelon de courant, la spire a une autoinductance qui l'en empêche. / 1

si $\theta - \frac{\pi}{2} = 0$ (erreur énoncé) $\ddot{\theta}(0) = 0$

alors $J \ddot{\theta}(0^+) = -Ni(0^+) SB$

Q21. En RSF, $\ddot{\theta}(t) = \theta_A \cos(\omega t + \varphi)$ / 1

avec $\theta_A = \frac{C I_0}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + (a\omega)^2}}$ / 1

Q22. Cela dépend du facteur de qualité. On peut le supprimer égal à $\sqrt{2}$ pour simplifier l'expression et considérer le système proche du régime critique (réponse apaisée) / 1

$\omega_c = \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} = 50 \text{ Hz}$ / 1