Devoir Surveillé de Physique n°2

Thème : Interférences et régimes transitoires de circuits électriques. **Durée : 4h**

1 Mesure d'épaisseur par interférométrie

Adapté de l'épreuve A - PT 2017
Frits Zernike, qui a obtenu le prix Nobel en 1953 pour son microscope à contraste de phase, a dans un premier temps utilisé un montage interférentiel à trois fentes, pour contrôler ou mesurer l'épaisseur d'une fine lame transparente à faces parallèles. Il sera supposé par la suite que tous les rayons lumineux sont très peu inclinés par rapport à l'axe horizontal.

1.1 Système interférentiel à deux fentes

Soit deux fentes 1 et 2 éclairées par une source lumineuse monochromatique, de longueur d'onde λ, pouvant être modélisé comme deux points source émettant une onde sinusoïdale en phase l'une avec l'autre écrite sous la forme :

$$s_i(t) = S_0 \cos(\omega t),$$

avec i l'indice associé au point source (cf figure 1). On note E_0 l'éclairement émis par chacune des deux fentes : $E_0 = \langle s_i^2(t) \rangle = \dfrac{S_0^2}{2}$.
Un écran, placé parallèlement au plan des fentes, est situé à une distance D très grande devant l'espacement $2a$ entre les fentes. On note $\mathscr{L}_i$ le chemin optique du point source i jusqu'à l'abscisse x de l'écran.

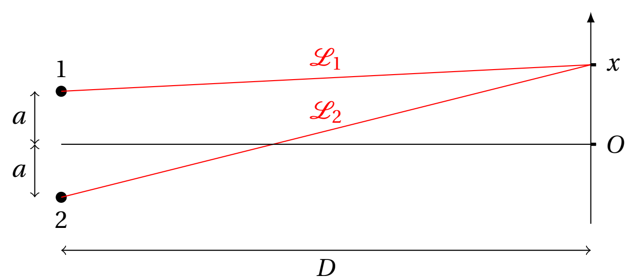


FIGURE 1 – On suppose que les points lumineux émettent un signal monochromatique, dans la direction du point d'ordonnée x sur un écran à distance D des points source, qui se propage sans atténuation, ni déformation, ni dispersion et dans un milieu d'indice égal à 1.

1. Rappeler l'expression de ω en fonction de λ. Donner le nom et la valeur de la constante physique intervenant dans cette relation dans le cas d'une onde lumineuse.
   $\omega = 2\pi c/\lambda$ [/1]
   avec c = 3×10^8 m s^{-1} la célérité de la lumière dans le vide. [/1]
2. Donner l'expression du signal reçu en x provenant de la source 1 en supposant un retard dû à la propagation dans le vide du rayon lumineux suivant le chemin $\mathscr{L}_1$. Faire de même pour le signal 2.
   Le signal 1 se propageant sans atténuation, ni dispersion, le signal reçu en x correspond au signal $s_1(t)$ retardé temporellement. [/1]
   Ce retard temporel est de $\mathscr{L}_1/c$, c étant la célérité de l'onde lumineuse dans un milieu d'indice 1. [/1]
   Le signal reçu en x depuis la source 1 s'écrit $S_0 \cos\left(\omega\left(t - \dfrac{\mathscr{L}_1}{c}\right)\right)$. [/1]
   Pour les mêmes raisons, le signal reçu en x depuis la source 2 s'écrit $S_0 \cos\left(\omega\left(t - \dfrac{\mathscr{L}_2}{c}\right)\right)$. [/1]
3. Montrer que le carré de la somme des signaux lumineux reçus en x peut s'écrire sous la forme suivante en utilisant une formule trigonométrique de votre choix :

$$s^2(x,t) = S_0^2 \cos^2\left(\frac{2\pi(ct - \mathscr{L}_1)}{\lambda}\right) + S_0^2 \cos^2\left(\frac{2\pi(ct - \mathscr{L}_2)}{\lambda}\right) + S_0^2\left[\cos\left(\frac{2\pi(2ct - \mathscr{L}_2 - \mathscr{L}_1)}{\lambda}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)\right] \quad (1)$$

   En déduire l'expression de δ et nommer cette grandeur.
   Le résultat étant donné, il est attendu une grande rigueur dans sa justification.
   La rigueur attendue est contenue dans les étapes de calcul. La tentation est de vouloir développer en premier le terme contenu dans le cosinus, ce qui est une perte de temps dans l'écriture du carré de la somme des cosinus. Poser $\varphi_1 = \omega(t - \mathscr{L}_1/c)$ et $\varphi_2 = \omega(t - \mathscr{L}_2/c)$.
   Le carré de la somme des signaux reçus en x et émis par 1 et 2 s'exprime : [carre de la somme /1]

$$\begin{aligned} s^2(x,t)/S_0^2 &= \left(\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2)\right)^2 \\ &= \cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) + 2\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_1) \end{aligned}$$

en utilisant les formules trigonométriques : [formule /1]

$$2\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_1+\varphi_2)+\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_1+\varphi_2 &= \omega\left(t-\frac{\mathscr{L}_1}{c}\right)+\omega\left(t-\frac{\mathscr{L}_2}{c}\right)\\ &= \frac{2\pi}{\lambda}(ct+ct-(\mathscr{L}_2+\mathscr{L}_1)) \quad \text{D'après question 1)}\\ &= \frac{2\pi(2ct-\mathscr{L}_2-\mathscr{L}_1)}{\lambda}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1-\varphi_2 &= \omega\left(t-\frac{\mathscr{L}_1}{c}\right)-\omega\left(t-\frac{\mathscr{L}_2}{c}\right)\\ &= \frac{2\pi}{\lambda}(ct-ct-(-\mathscr{L}_2+\mathscr{L}_1)) \quad \text{D'après question 1)}\\ &= -\frac{2\pi\delta}{\lambda}\end{aligned}$$

On retombe bien sur l'expression demandée (fonction cosinus paire : $cos(-2\pi\delta/\lambda) = cos(2\pi\delta/\lambda)$) avec $\delta = \mathscr{L}_2 - \mathscr{L}_1$ la différence de marche entre les chemins empruntés par les rayons provenant des sources 2 et 1. [nom et valeur de $\pm\delta$ /1]

4. Rappeler l'expression notée $\langle S\rangle$ de la moyenne temporelle d'un signal $S(t)$ périodique et intégrable, de période T.
   $\langle S\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\mathrm{d}t$
5. En utilisant le fait que la moyenne temporelle de $\cos^2(\omega t)$ soit la même que celle de $\cos^2(\omega(t-t_0))$ quelque soit t_0, et que la moyenne temporelle de $\cos(\omega t)$, $\cos(2\omega t)$ et $\cos(2\omega(t-t_0))$ soit nulle sur une période $T = 2\pi/\omega$ quelque soit t_0, retrouver l'expression de la formule d'Young :

$$E(\delta) = 2E_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)\right),$$

   exprimant l'éclairement obtenu à l'abscisse x à partir de deux points source cohérents (même longueur d'onde) en phase.

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\cos(2\omega t)+1}{2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \cos(2\omega t)\mathrm{d}t}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T 1\mathrm{d}t}_{=1}\right]\\ &= \frac{1}{2} \qquad [/1]\end{aligned}$$

   En utilisant le fait que les deux premiers termes de l'expression (1) s'identifient à des expressions du type $\cos^2(\omega(t-t_0))$, la valeur moyenne vaut $S_0^2/2$ pour chaque terme. Le troisième terme s'identifie à une moyenne temporelle de $\cos(2\omega(t-t_0))$ sur une période temporelle T, ie une moyenne nulle. Le dernier terme est la moyenne temporelle d'une constante, elle est donc égale à cette constante $S_0^2\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$. Sachant que $S_0^2/2 = E_0$, on obtient l'expression attendue. [/1]
6. Utiliser l'approximation $x \ll D$ et le développement limité $\sqrt{1+\varepsilon} \simeq 1+\varepsilon/2$ avec $\varepsilon \ll 1$ pour exprimer δ simplement (sans racines) en fonction de x, a et D.
   La distance entre les fentes est de $2a$ et pas de a.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_1 &= \sqrt{D^2+(x-a)^2}\\ &\simeq D\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{D}\right)^2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_2 &= \sqrt{D^2+(x+a)^2}\\ &= D\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x+a}{D}\right)^2\right)\end{aligned}$$

   On en déduit $\delta \simeq 2ax/D$. [/2]
7. Tracer l'allure de l'éclairement en fonction de x.
   Faire une figure correcte en nommant les axes et en faisant apparaître la longueur d'onde, le minimum et le maximum de l'éclairement sur ces axes.
   cf cours en remplaçant l'interfrange par $\lambda D/2a$ [axes /1 interfrange/1 max $4E_0$ et min en 0 /1 frange centrale brillante /1]

1.2 Système interférentiel à trois fentes

On rajoute une fente entre les deux précédentes. Le montage peut être schématisé comme sur la figure 2. Les trois points source émettent des signaux en phase $s(t) = \cos(\omega t)$.

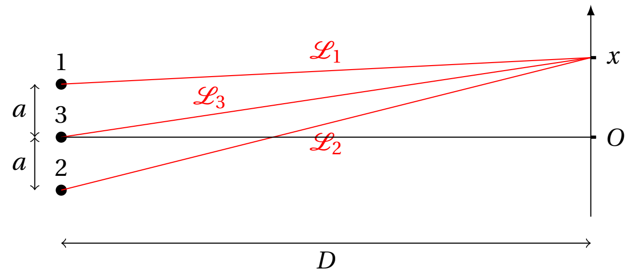


FIGURE 2 – On suppose que les points lumineux émettent un signal monochromatique, dans la direction du point d'ordonnée x sur un écran à distance D des points source, qui se propage sans atténuation, ni déformation, ni dispersion et dans un milieu d'indice égal à 1.

8. Exprimer la somme des trois signaux reçus au point d'abscisse x sur l'écran en utilisant les chemins $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ et $\mathscr{L}_3$.
Même raisonnement que la questions 2),
$$s(x,t)/S_0 = \cos\left(\omega\left(t-\frac{\mathscr{L}_1}{c}\right)\right)+\cos\left(\omega\left(t-\frac{\mathscr{L}_2}{c}\right)\right)+\cos\left(\omega\left(t-\frac{\mathscr{L}_3}{c}\right)\right) \qquad [/1]$$

9. L'éclairement en un point d'abscisse x sur l'écran s'écrit :
$$E(x) = 3E_0 + 2E_0\left[\cos\left(\frac{2\pi(\mathscr{L}_3-\mathscr{L}_1)}{\lambda}\right)+\cos\left(\frac{2\pi(\mathscr{L}_2-\mathscr{L}_3)}{\lambda}\right)+\cos\left(\frac{2\pi(\mathscr{L}_2-\mathscr{L}_1)}{\lambda}\right)\right] \qquad (2)$$
Expliquer la provenance de chacun des termes de cette expression.
Le premier terme $3E_0 = 3S_0^2/2$ correspond à la moyenne temporelle de chacun des termes de $s(x,t)$ valant $S_0^2/2$ [/1]
Les autres termes correspondent aux moyennes temporelles des termes croisés $\cos(\varphi_i)\cos(\varphi_j)$ avec $i \neq j$ (avec la notation $\varphi_i = 2\pi(ct-\mathscr{L}_i)/\lambda$ introduite précédemment). En effet, la réponse de la question 3) nous permet d'écrire :
$$\langle 2S_0^2\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\rangle = 2E_0\cos(\varphi_2-\varphi_1),$$
et par changement d'indice :
$$\langle 2S_0^2\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_3)\rangle = 2E_0\cos(\varphi_3-\varphi_1),$$
$$\langle 2S_0^2\cos(\varphi_3)\cos(\varphi_2)\rangle = 2E_0\cos(\varphi_2-\varphi_3), \quad [/1]$$

10. Montrer que pour $D \gg a$, $(\mathscr{L}_1-\mathscr{L}_3) \simeq -(\mathscr{L}_2-\mathscr{L}_3)$ et que $(\mathscr{L}_1-\mathscr{L}_3) \simeq (\mathscr{L}_1-\mathscr{L}_2)/2$ en négligeant les termes en a^2/D^2 devant les termes en ax/D^2.
$\mathscr{L}_3 \simeq D(1+x^2/2D^2)$, il vient d'après 6) que $\mathscr{L}_1-\mathscr{L}_3 \simeq -ax/D+a^2/2D \simeq -ax/D = -\delta/2$ (si $D \gg x \gg a$) et $\mathscr{L}_3-\mathscr{L}_2 \simeq -ax/D = -\delta/2$. C'est bien ce qui est attendu. [/1]
11. Utiliser la formule précédente et la formule trigonométrique $\cos(\varphi) = 2\cos^2(\varphi/2)-1$ pour mettre l'éclairement sous la forme
$$E(x) = E_0\left[1+2\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)\right]^2$$
D'après la question précédente, (2) peut se mettre sous la forme $E(x) = 3E_0+2E_0(2\cos(\pi\delta/\lambda)+\cos(2\pi\delta/\lambda))$. Or d'après la formule trigonométrique, $\cos(2\pi\delta/\lambda) = 2\cos^2(\pi\delta/\lambda)-1$. Ce qui donne $E(x) = E_0+4E_0\cos(\pi\delta/\lambda)+4E_0\cos^2(\pi\delta/\lambda))$ soit l'expression proposée. [/1]
12. Calculez les valeurs de $E(x)/E_0$ pour les valeurs de x suivantes : $x = \lambda D/3a$ et $x = \lambda D/a$. En déduire le minimum et le maximum pris par l'éclairement.
0 et 9 [/2]

Une lame d'épaisseur e et d'indice n est introduite devant la fente centrale 3.

13. Montrer que la différence temporelle entre un rayon lumineux passant à travers un milieu d'indice n et d'épaisseur e et un rayon lumineux parcourant la même distance mais dans le vide s'écrit $e(n-1)/c$.
Dans le vide, une onde parcourant une distance e sera retardé de e/c par rapport à la source. Dans un milieu d'indice n, la célérité d'une onde lumineuse est modifiée et devient c/n (par définition de n), le retard dans ces conditions vaut en/c. De cette différence de retard en résulte l'expression proposée. [/1]
14. En supposant les rayons peu inclinés, que devient l'expression (2) pour une lame d'épaisseur $e = \dfrac{\lambda}{4(n-1)}$? Que devient le minimum de l' éclairement ?

$$\begin{aligned}
E(x) &= 3E_0 + 2E_0\left[\cos\left(\frac{2\pi(\delta/2+e(n-1))}{\lambda}\right)+\cos\left(\frac{2\pi(\delta/2-e(n-1))}{\lambda}\right)+\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)\right]\\
&= 3E_0 + 2E_0\left[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}-\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}+\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)\right] \qquad \text{en utilisant} \quad e=\lambda/4(n-1)\\
&= 3E_0 + 2E_0\cos\left(\frac{4\pi a x}{\lambda D}\right) \qquad [/1]
\end{aligned}$$

Le minimum de l'éclairement est obtenu pour la valeur minimale du cosinus soit E_0 et le maximum est de $5E_0$ [/1]

15. Le contraste des franges est défini par $\mathscr{C} = (E_{max} - E_{min})/(E_{max} + E_{min})$. Une variation de contraste de 20% est nettement discernable par une surface photosensible. En déduire qu'il est possible de distinguer des lames de faibles épaisseurs avec ce système.
Le contraste est défini par $\mathscr{C} = (E_{max} - E_{min})/(E_{max} + E_{min})$. Le contraste est de $(9-0)/(9+0) = 1$ si la lame est absente, et de $(5-1)/(5+1) = 0,667$ si la lame d'épaisseur $\lambda/4(n-1)$ est présente. C'est une variation de contraste facilement repérable par un détecteur (>30%). [/2]
L'épaisseur (en réalité les défauts d'épaisseur) peut être faible : avec un laser rouge (632 nm) et une lame d'indice 1,5, l'épaisseur observable est d'environ 100 nm ! [/1]

2 Stocker l'énergie avec un condensateur

Sujet basé sur le concours EPITA - IPSA - ESME.

2.1 Caractéristiques d'un condensateur

16. Rappeler la loi de comportement d'un condensateur de capacité notée C. Utiliser la convention récepteur et la notation U pour la tension à ses bornes.
$i = C\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$ + schéma pour introduire et indiquer le sens de i.
17. Justifier la relation $Q = CU$, où Q est la charge accumulée par le condensateur, à partir de la loi précédente.
Par intégration de $i = C\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$ sur un chemin faisant passer U de 0 à U Volt, la charge étant nulle pour un condensateur soumis à une tension de 0 Volt.
18. En admettant que l'énergie stockée dans un condensateur est nulle s'il est déchargé, démontrer l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur $\mathscr{E}_{\text{stockée}} = \dfrac{1}{2}CU^2$ en exploitant la question précédente.
cf cours : la variation d'énergie stockée par C entre une tension de 0 à U volt à ses bornes vaut $CU^2/2$.

Document :
En 2009, la RATP et Alstom ont expérimenté en service commercial un tramway Citadis équipé de supercondensateurs sur la ligne T3 du réseau francilien. La rame a été équipée de 48 modules de supercondensateurs (15 kg pièce) pour le stockage de l'énergie à bord. L'ensemble est équivalent à 48 supercondensateurs montés en dérivation sous une tension de 750 V. Ceci permet aux trams de circuler en autonomie sur les sections dépourvues de ligne aérienne de contact. En autonomie la rame peut franchir 400 m, soit la distance entre deux stations sur la ligne T3, avec une vitesse moyenne d'environ 15 km/h. Les moteurs développent une puissance moyenne continue de 500 kW, et sont alimentés sous 750 V. Présentant une résistance interne très faible, les supercondensateurs autorisent le passage d'intensités très importantes pendant les 20 secondes que dure un rechargement en station, et sont donc en cela plus adaptés que les batteries conventionnelles.

Source images : Wikipedia, et texte : https ://www.ville-rail-transports.com/ferroviaire/alstom-et-la-ratp-testent-les-supercondensateurs-2/

2.2 Supercondensateurs

On donne : $4\times 3{,}6/3 = 4{,}8$; $4/(3\times 3{,}6) = 0{,}37$; $3/(4\times 3{,}6) = 0{,}21$; $200/7{,}52 = 3{,}6$; $7{,}52/200 = 0{,}28$.
Un "supercondensateur" est un condensateur de technique particulière, qui permet d'obtenir une capacité élevée pour un encombrement réduit, et donc une densité de puissance et une densité d'énergie intermédiaires entre les batteries et les condensateurs électrolytiques classiques. Ils sont utilisés dans des domaines variés, dont la propulsion de bateaux, de bus ou de tramway. Leur faible résistance

interne permet des courants élevés et donc des charges rapides et des puissances de sortie importantes. L'étude porte ici sur des super-condensateurs, en particulier ce qui contraint leur dimensionnement (capacité, résistance interne).
À partir des données du document ci-dessous et des approximations nécessaires, en déduire les valeurs :

19. de l'énergie nécessaire au trajet entre deux stations,
Energie nécessaire au trajet de 400m = $\underbrace{500000}_{\text{Puissance moyenne développée par les moteurs}} \times \underbrace{400/(15/3,6)}_{\text{temps moyen pour parcourir 400m}} = 4{,}8 \times 10^7$ J
20. de la capacité d'un des 48 supercondensateurs (commenter la valeur trouvée),
Energie stockée dans un condensateur = Energie nécessaire au trajet de 400m / 48 et d'après la question 18), C vaut le double de cette énergie stockée divisée par le carré de la tension soit C = 3,6 F.
21. de la résistance du circuit de charge.
En supposant le temps de chargement étant de $3RC$ (charge à 95% d'un condensateur dans un circuit RC série), R vaut $20/(3,6\times3) =$ 0,37 Ω.

2.3 Charge d'un condensateur

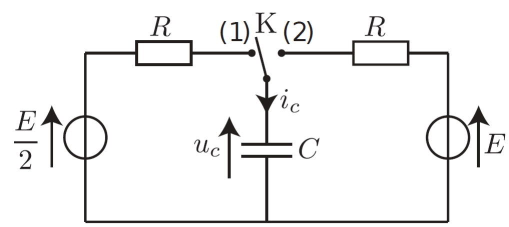
Lorsqu'un condensateur est utilisé comme une batterie, la question de sa recharge se pose. L'énergie est prélevée sur le réseau électrique, et on souhaiterait que 100% de cette énergie soit transférée au condensateur. Nous allons montrer que ceci dépend de la stratégie de charge retenue. On appelle "rendement de la charge du condensateur" le rapport entre l'énergie stockée par le condensateur à l'issue de la charge et de l'énergie fournie par le générateur au cours de cette charge :

$$\eta = \frac{\mathscr{E}_{\text{stockée}}}{\mathscr{E}_{\text{fournie}}} \tag{3}$$

De manière générale, la charge se fait à travers la résistance totale du circuit R. On note C la capacité du condensateur et E la tension finale à atteindre aux bornes du condensateur.

22. Montrer par des arguments dimensionnels que l'expression du rendement η ne peut pas dépendre des valeurs de R, C ou E.
η est par définition adimensionné. D'après les lois de comportement des résistances et des condensateurs $\dim(R) = \dim(E)/I$ et $\dim(C) = IT/\dim(E)$. Il n'y a pas de combinaisons possibles pour obtenir une quantité adimensionné avec cet ensemble de valeurs, il faut nécessairement introduire une nouvelle variable pour éliminer $\dim(E)$, I ou T.

Les sous-parties suivantes se réfèrent au circuit ci-contre pour étudier deux méthodes de recharge menant à deux valeurs de rendement différentes.



2.3.1 Premier procédé de charge

L'interrupteur K est d'abord dans la position intermédiaire où il n'établit aucun contact. Le condensateur étant initialement déchargé, on bascule l'interrupteur K dans la position (2) à $t = 0$.

23. Établir l'équation différentielle portant sur uc(t). On la mettra sous la forme :
$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$
avec τ un paramètre dont on précisera l'expression.
0 sans les bonnes notations u_c, i_c ou l'introduction de "U_R" sans produire un schéma où il apparaît.
    — Loi des mailles $u_c = E + U_R$ avec bonne notations et U_R à placer sur un schéma dans le sens de i_c [/0.5]
    — Loi d'Ohm $U = -Ri_c$ avec bonne notations [/0.5]
    — Loi de comportement de C $i_c = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ avec bonne notations [/0.5]
24. Déterminer sans utiliser l'équation différentielle la valeur de $u_c(0^+)$, juste après le basculement de l'interrupteur.
25. Résoudre l'équation différentielle obtenue ci-dessus.
26. Tracer l'allure de la solution $u_c(t)$.
27. Donner en fonction de C et de E l'expression de l'énergie stockée par le condensateur à la fin de sa charge.
28. Démontrer que le courant i_c s'écrit, pour tout $t \geq 0$: $i_c(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$.
29. Calculer alors l'énergie électrique fournie par le générateur sur l'ensemble de la charge.
30. Quelle est la valeur du rendement de la charge (défini par l'expression (3)) avec la méthode envisagée ? Peut-il être optimisé en changeant la résistance R ?

2.3.2 Second procédé de charge

On souhaite utiliser une méthode qui permet d'améliorer le rendement de la charge. On réalise une charge en deux temps. Le condensateur est initialement déchargé. L'interrupteur K est d'abord dans la position intermédiaire où il n'établit aucun contact. Puis il est fermé en position (1) à $t = 0$. Lorsque le régime transitoire qui s'ensuit est achevé, l'interrupteur est basculé en position (2).

31. Déterminer l'expression de $u_c(t)$ pendant la première phase de la charge.
32. Déterminer en fonction de R et de C l'expression de l'instant t_1 pour lequel la tension u_c aux bornes du condensateur atteint 99% de sa valeur finale au cours de cette première étape.

Dans la suite, la charge est supposée totalement achevée à cet instant t_1 (i.e. $u_c(t_1) \simeq E/2$). La phase 2 est alors déclenchée (basculement de l'interrupteur en position (2)).

33. Exprimer la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur au cours de la deuxième phase de charge, qui commence à l'instant t_1.
34. Tracer l'allure de $u_c(t)$ en fonction du temps au cours de l'ensemble des deux phases de charge.
35. Exprimer l'intensité i_c qui traverse le condensateur pendant les deux phases de charge. On distinguera les cas en fonction de t.
36. Déterminer l'énergie électrique fournie par les deux générateurs pendant la charge. On utilisera $e^{-5} \simeq 0$.
37. En déduire le rendement pour cette nouvelle façon de procéder. Conclure quant aux avantages et désavantages par rapport à la première méthode.

2.3.3 Généralisation à N étapes

Le but est ici de généraliser l'étude précédente à N étapes dans le but d'améliorer le rendement lors du processus de charge (le raisonnement ne se fait plus à partir du schéma). Soit $t_0 = 0$ l'instant initial où le condensateur est déchargé. La première étape a lieu de t_0 à $t_1 = 5\tau$, par un générateur de tension $\frac{E}{N}$, à travers une résistance R.

De manière générale, l'étape numéro k de la charge ($k = 1$ à N) a lieu de t_{k-1} à t_k, par un générateur de tension $k\frac{E}{N}$, à travers une résistance R, avec $t_k = k \times 5\tau$.
Au début de l'étape k, $u_c(t_{k-1}) = (k-1)\frac{E}{N}$,
et à la fin de l'étape k, $u_c(t_k) = k\frac{E}{N}$.
Lors de l'étape k de la charge, déterminer (notamment en fonction de k et de N) :

38. l'équation différentielle suivie par la tension uc(t) aux bornes du condensateur, puis l'expression de sa solution $u_c(t)$,
39. l'expression de l'intensité $i_c(t)$ traversant le condensateur,
40. l'expression de l'énergie fournie par le générateur (on utilisera $e^{-5} \simeq 0$).

En déduire ensuite :

41. l'expression de l'énergie fournie par le générateur lors de l'ensemble de la charge,
42. puis montrer enfin que le rendement de la charge en N étapes s'écrit $\eta = \frac{N}{N+1}$.