

Devoir Surveillé de Physique n°1

Thème : Optique géométrique et analyse dimensionnelle.

Durée : 4h

Consignes :

- L'usage de la calculatrice est interdit.
- Les expressions littérales seront encadrées, et les applications numériques soulignées en couleur. **Une application numérique sans unité sera considérée fautive. De même, elle sera comptée fautive si elle est laissée sous la forme d'une fraction.**
- Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur votre copie. Vérifiez tout de même que l'erreur ne provient pas de vous (homogénéité, ordre de grandeur, etc.).
- Les parties peuvent être traitées de manière indépendante et dans l'ordre que vous voulez. Cependant, les parties et questions devront être restituées dans l'ordre sur votre copie : il faudra donc savoir gérer les espaces si vous sautez des questions.

Pour **gagner** des points supplémentaires :

- La réalisation de schémas soignés, non explicitement demandés et accompagnant le propos pourra être valorisée.
- Les commentaires sur les valeurs numériques seront appréciés et éventuellement valorisés.

Ce qui vous fera **perdre** des points :

- Un schéma d'optique "miniature-brouillon-coin-d-feuille" ne sera pas validé comme schéma. Un schéma doit remplir au moins 1/4 voir 1/3 de votre feuille et être fait à la règle pour les rayons optiques.
- Une réponse non justifiée : ne pas expliciter les hypothèses, définitions, propriétés et théorèmes employés conduira à un mauvais résultat.
- Un résultat non homogène. Un vecteur égal à un scalaire.
- Utiliser les valeurs numériques à la place des expressions littérales des grandeurs. Pour ne pas perdre de points, conduisez le calcul avec les grandeurs littérales, puis, une fois l'expression littérale obtenue et qu'une application numérique est demandée, remplacez les grandeurs par leurs valeurs numériques.
- Laisser l'application numérique sous la forme d'une fraction.

Les exercices sont indépendants. Si vous ne savez pas répondre à une question, laissez un espace sur votre copie pour pouvoir y revenir avant de passer à la question suivante.

1 Détection automatique de la pluie

1. Énoncer les lois de Snell-Descartes.

Rayons réfractés et transmis contenus dans le plan d'incidence de l'autre côté de la normale par rapport au rayon incident [/1].
Loi de la réflexion et loi de la réfraction (pas de points pour une formule sans schéma) [/2].

2. Un rayon se propageant d'un milieu d'indice optique n_1 parvient à un dioptre séparant le milieu d'indice n_1 d'un milieu d'indice n_2 . À quelle condition sur les deux indices n_1 et n_2 peut-il se produire un phénomène de réflexion totale?

Uniquement si $n_1 > n_2$. La réponse faisant intervenir l'angle (du type "condition de non réflexion $n_1 \sin(i_1) > n_2$ ") est fautive, la question porte clairement sur une condition sur les deux indices et pas sur les deux indices et l'angle d'incidence [/1]

3. En supposant la condition précédente sur les angles vérifiée, établir la condition sur l'angle d'incidence pour qu'il n'existe pas de rayon réfracté.

Loi de la réfraction $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$. Pour $n_1 > n_2$, il existe $i_1 \in]i_{\max}, \frac{\pi}{2}]$ tel que cette loi ne peut être vérifiée, à savoir pour tout i_1 conduisant à $n_1 \sin(i_1) > n_2$. La valeur de i_{\max} en fonction de n_1 et n_2 se déduit de la loi de réfraction lorsque $\sin(i_2)$ est maximal,

$$\text{i.e. } i_2 = \pi/2 : \boxed{i_{\max} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)} \quad [/1]$$

De nombreux dispositifs d'aide à la conduite sont apparus ces dernières années, comme par exemple la détection automatique de pluie qui commande la mise en route des essuie-glaces. Disposé à l'intérieur du véhicule, une diode électroluminescente DEL projette un faisceau lumineux sur le pare-brise. Un capteur reçoit et mesure en permanence la lumière réfléchie. Plus il y a d'eau sur la vitre, moindre est la réflexion interne au pare-brise. Le capteur de pluie pilote ainsi l'essuie-glace en fonction de la quantité d'eau détectée et sélectionne automatiquement la vitesse d'essuyage la plus efficace.

Les rayons lumineux émis par la diode électroluminescente (cf figure 1) se propagent jusqu'au pare-brise dans du plexiglas d'indice optique $n_p = 1,50$. Les rayons sont dirigés vers le pare-brise avec un angle d'incidence de $\theta_1 = 50^\circ$. On supposera que le pare-brise est en verre d'indice optique $n_v = 1,55$. L'indice optique de l'eau est $n_e = 1,33$ et celui de l'air $n_a = 1,00$.

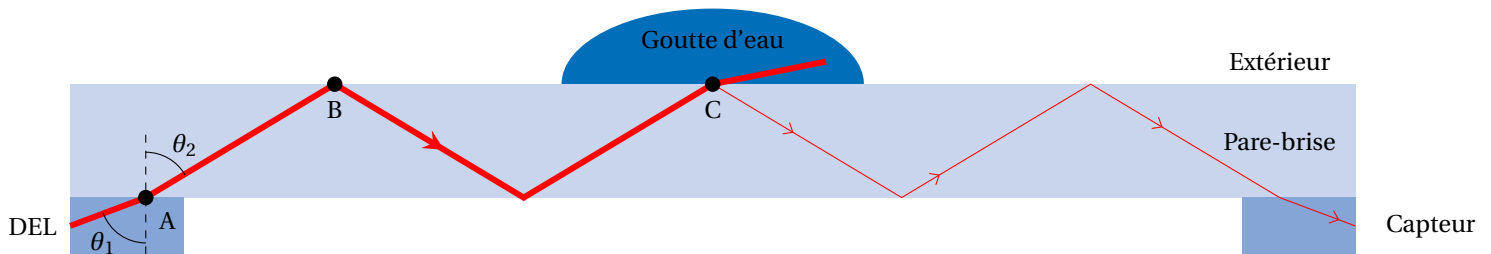


FIGURE 1 – Représentation du dispositif de détection de pluie sur un pare brise. Le schéma n'est pas à l'échelle et l'inclinaison des rayons représentée ne peut en aucun cas être la base d'une argumentation sur les phénomènes de réflexion ou de réfraction qui se déroulent dans ce dispositif. Les faces du pare-brise sont supposées parallèles.

Calculs pouvant être utiles :

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\frac{1,50 \times \sin(50^\circ)}{1,55}\right) &= 47,8^\circ & \arcsin\left(\frac{1,55 \times \sin(50^\circ)}{1,50}\right) &= 52,3^\circ & \arcsin\left(\frac{1,00 \times \sin(50^\circ)}{1,50}\right) &= 30,7^\circ & \arcsin\left(\frac{1,33 \times \sin(50^\circ)}{1,50}\right) &= 42,8^\circ \\ \arcsin\left(\frac{1,33 \times \sin(50^\circ)}{1,55}\right) &= 41,1^\circ & \arcsin\left(\frac{1,33}{1,55}\right) &= 59,1^\circ & \arcsin\left(\frac{1,33}{1,5}\right) &= 62,4^\circ & \arcsin\left(\frac{1}{1,55}\right) &= 40,2^\circ \\ \arcsin\left(\frac{1}{1,33}\right) &= 48,8^\circ & \arcsin\left(\frac{1}{1,5}\right) &= 41,8^\circ & & & & \end{aligned}$$

4. Calculer la valeur de θ_2 l'angle de réfraction au point A.

Au point A, s'il y a réfraction, l'angle θ_2 vérifie la loi de réfraction : $n_p \sin(\theta_1) = n_v \sin(\theta_2)$ soit, $\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_p \sin(\theta_1)}{n_v}\right)$. [1]

A.N. : $\theta_2 = 47,8^\circ$ [1]

5. En l'absence de pluie (figure 1 sans la goutte d'eau), existe-il un rayon réfracté au point B ou au point C? Justifier précisément la réponse (une réponse basée uniquement sur le schéma sera comptée fautive).

Le rayon incident en B et C forme un angle d'incidence θ_2 avec la normale au dioptré puisque les faces du pare-brise sont parallèles entre elles et que l'angle des faisceaux réfléchis avec la normale aux dioptrés faisant intervenir le pare-brise sont tous de valeur θ_2 d'après la loi de Snell-Descartes sur la réflexion. [1]

Le dioptré en B correspond à une interface air/verre avec le verre comme milieu du rayon incident, plus réfringent (indice plus élevé) que l'air. Il peut donc y avoir, d'après la question précédente, une réflexion totale si l'angle du rayon incident en B θ_2 dépasse

$$\theta_{B,\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_a}{n_v}\right). [1]$$

En absence d'eau, pour le point C, il y a réflexion totale si l'angle du rayon incident en C, qui vaut θ_2 , dépasse $\theta_{C,\text{lim}} = \theta_{B,\text{lim}}$. [1]

A.N. : $\theta_{B,\text{lim}} = 40,2^\circ$, il n'y a donc pas de réfraction dans l'air mais une réflexion totale dans le pare-brise car $\theta_2 = 47,8^\circ > \theta_{B,\text{lim}}$. Il en va de même pour le point C, en absence d'eau, il n'y a pas de réfraction. [1]

6. En présence d'une goutte de pluie sur le pare-brise, existe-il un rayon réfracté au point C? Justifier précisément la réponse.

Pour le point C en présence d'eau, $\theta_{C,\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_e}{n_v}\right)$. [1]

A.N. : $\theta_{C,\text{lim}} = 59,1^\circ$, il y a donc une réfraction dans l'eau car $\theta_2 = 47,8^\circ < \theta_{C,\text{lim}}$. [1]

7. Expliquer pourquoi plus il y aura de gouttes sur le pare-brise, moins l'intensité lumineuse reçue par le capteur sera importante.

La réflexion est totale en absence d'eau. En présence d'eau, la réfraction est possible et une partie de la lumière est déviée de sa trajectoire vers le détecteur : il en résulte une baisse d'intensité qui va dépendre du nombre de réflexions sur la face extérieure du pare brise présentant une interface eau/verre, donc de la quantité d'eau au contact du pare-brise.

2 Tracé de rayons

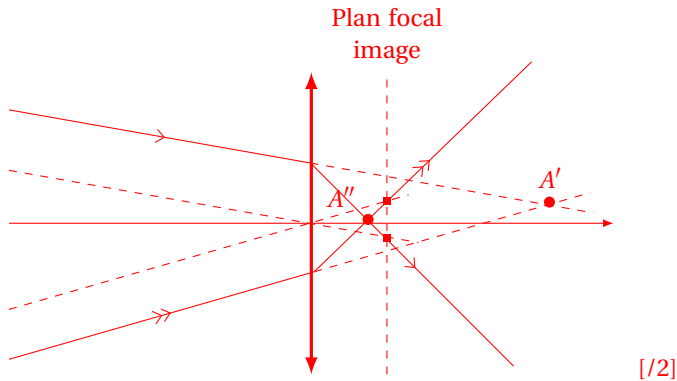
8. Où se situe l'image d'un objet virtuel situé à l'infini par une lentille divergente? Schématisez la situation.

Virtuel ou réel, un objet à l'infini correspond à des rayons incidents parallèles à l'axe optique, ils sont déviés par la lentille en se croisant au foyer image (situé du côté des rayons incidents pour une lentille divergente). Le point image est donc virtuel, confondu avec le foyer image. [1]

9. Construire la suite des rayons de la figure 2 directement sur l'énoncé. Justifiez vos tracés en utilisant le vocabulaire adéquat (autant de points que la construction).

Il faut tracer des rayons parallèles aux rayons incidents passant par le centre optique : ils ne sont donc pas déviés et coupent le plan focal image en un point qui correspond au foyer secondaire image. Les rayons réels incidents vont passer par leurs foyers secondaires respectifs. Les deux rayons émergents, provenant d'un point source A se croisent après le centre optique en A'' et les rayons incidents se croisent après la lentille en A' : l'image A'' est réelle et l'objet A' est virtuel, formé à partir d'un point source A à

partir d'un autre système optique, non représenté sur le schéma. [/2]



10. Que dire sur le type d'objet et d'image de ce système optique? [1]

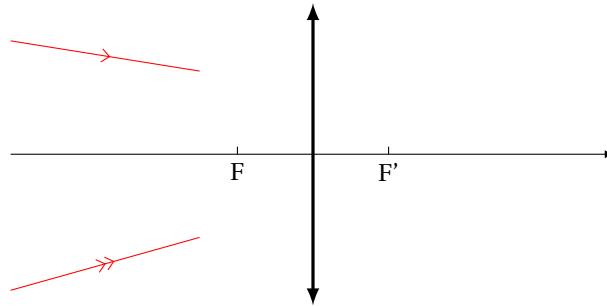


FIGURE 2 – Les rayons proviennent d'un même point source appelé A.

3 Lunette de Galilée

Une lunette de Galilée est schématisée par deux lentilles minces de même axe optique Δ :

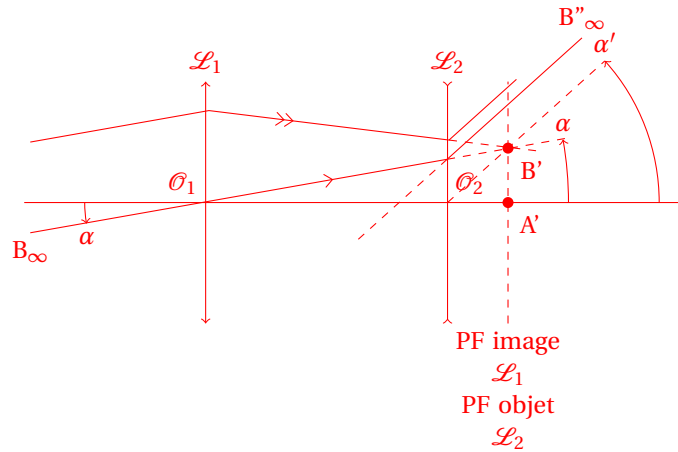
11. \mathcal{L}_1 (objectif convergent) de distance focale image f'_1 , de centre optique \mathcal{O}_1 et de foyers principaux objet F_1 et image F'_1 ;
12. \mathcal{L}_2 (oculaire divergent) de distance focale image f'_2 , de centre optique \mathcal{O}_2 et de foyers principaux objet F_2 et image F'_2 ;

On souhaite observer la planète Mars (considérée à l'infini) qui est vue à l'œil nu sous un diamètre apparent α (angle que font les rayons des bords opposés issus de la planète en se croisant au niveau de l'observateur). Mars, objet noté AB avec A sur l'axe optique, a un rayon de 3390 km et se trouve à une distance de la Terre comprise entre 55,7 millions de kilomètres et 401,3 millions de kilomètres. La planète Mars est couverte d'un grand nombre de cratères dont le cratère Schiaparelli de diamètre 470 km. On rappelle que pour des angles θ très faibles devant 1, $\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx \theta$.

13. Rappeler l'ordre de grandeur limite de la résolution angulaire de l'œil. On l'exprimera en minute d'arc puis en radian.
l' d'arc ou 3×10^{-4} rad. [1]
14. Déterminer le diamètre apparent α de la planète Mars (c'est-à-dire l'angle que font les rayons issus de deux points extrêmes de la planète). L'œil peut-il voir la planète? L'œil peut-il distinguer le cratère cité sur Mars?
Au plus près de la Terre, Mars a un diamètre apparent $\alpha \approx \tan(\alpha) = \text{diamètre Mars} / \text{distance Terre Mars}$. Soit $\alpha \approx 1 \times 10^{-4}$ rad, inférieure à la résolution de l'œil. [1]
L'œil peut voir la planète mais ne la distingue pas d'un point lumineux ayant la même intensité lumineuse. [1]
Distinguer les contours de Mars à plus grande distance ou distinguer un cratère est donc impossible à l'œil nu. [1]
15. Pourra-t-on considérer que l'on est dans le cadre des « conditions de Gauss »? Rappeler ces conditions.
Rayons paraxiaux : petits angles et rayons proches de l'axe optique. En vision directe, ces deux conditions sont vérifiées. [1]
Si l'observation se fait à la lunette, le grossissement devra être inférieur à 1000 (pour garder un diamètre angulaire apparent faible devant 1) ce qui est souvent le cas pour les lunettes.
16. Où doit se former l'image finale A''B'' donnée par la lunette pour que l'œil puisse l'observer sans accommoder?
à l'infini [1]
Où doit se former l'image intermédiaire A'B' qui joue le rôle d'objet pour l'oculaire \mathcal{L}_2 ?
dans le plan focal objet de l'oculaire [1]
Où se forme l'image de l'objet AB situé à l'infini par l'objectif \mathcal{L}_1 ?
dans le plan focal image de l'objectif [1]
17. En déduire la distance $\Delta = \overline{O_1O_2}$ entre l'objectif (\mathcal{L}_1) et l'oculaire (\mathcal{L}_2).
D'après la question précédente, l'image intermédiaire est située à une distance algébrique $\overline{OF_1} = f'_1$ de \mathcal{L}_1 et à $\overline{OF_2} = -f'_2$ de \mathcal{L}_2

(lentille divergente, attention au "-"). La distance $\Delta = f'_1 + f'_2$ est donc la distance entre les deux lentilles exprimée en fonction des focales des deux lentilles. [/2]

18. Faire le schéma de la lunette pour $f'_1 = -5f'_2$. Dessiner sur ce schéma la marche à travers la lunette d'un faisceau lumineux parallèle (non parallèle à l'axe optique) formé de rayons issus de l'astre. On tracera au moins deux rayons à travers la lunette. On fera clairement apparaître l'image intermédiaire A'B'. Quelle est la nature de A'B' pour \mathcal{L}_1 ? pour \mathcal{L}_2 ? La lunette est caractérisée par son grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$. On note α' l'angle que forment les rayons émergents extrêmes en sortie de la lunette (angle entre l'axe optique et les rayons tracés précédemment) et α l'angle sous lequel est vue la planète, c'est-à-dire l'angle entre l'axe optique et les rayons incidents.
19. Placer α et α' sur le schéma précédent.



- [/1] pour le faisceau passant par \mathcal{O}_1 non dévié
 [/1] pour le faisceau passant hors \mathcal{O}_1 dévié et passant par le PF secondaire
 [/2] pour le faisceau passant par \mathcal{O}_1 non dévié puis dévié par \mathcal{L}_2 en utilisant un rayon de construction passant par \mathcal{O}_2 et coupant ce rayon sur le PF image de \mathcal{L}_2 . Tout rayon convergeant sur ce foyer secondaire ressort parallèlement à ce rayon de construction.
 [/1] pour A'B' image réelle de AB par \mathcal{L}_1 et objet virtuel de \mathcal{L}_2 .
 [/1] pour α et α' .

20. Exprimer α en fonction de f'_1 et A'B'.
 Par construction AB étant un objet à l'infini sur l'axe optique, son image est située dans le plan focal image de \mathcal{L}_1 . En utilisant le triangle $A'\mathcal{O}_1B'$ rectangle en A' (aplanétisme des lentilles minces vérifiées car supposé dans les conditions de Gauss),

$$\tan(\alpha) \underset{\alpha \ll 1}{\approx} \alpha \approx \frac{[A'B']}{f'_1}$$

[/1]

21. Exprimer α' en fonction de f'_2 et A'B'.
 En utilisant le triangle $A'\mathcal{O}_2B'$ rectangle en A' :

$$\tan(\alpha') \underset{\alpha' \ll 1}{\approx} \alpha' \approx \frac{[A'B']}{-f'_2}$$

[/1]

22. En déduire l'expression de G en fonction des distances focales des deux lentilles.

$$G \approx \frac{f'_1}{-f'_2} \quad [/1]$$

23. En déduire la valeur de l'angle sous lequel la planète est vue à travers la lunette. Commenter.
 avec l'angle $\alpha' \approx \alpha G$ avec $G \approx 5$ d'après l'énoncé (grossissement positif donc l'image n'est pas retournée). Une multiplication par 5 du diamètre angulaire permet de dépasser le pouvoir de résolution de l'œil : $\alpha' \approx 5 \times 10^{-4}$ rad. Cela reste insuffisant pour résoudre un cratère (10 fois plus petit) ou la planète lorsqu'elle est à sa plus grande distance de notre planète (8 fois plus petit). [/2]

4 Appareil photographique

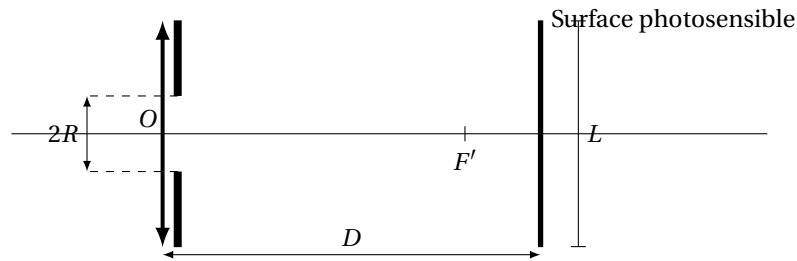
Les applications numériques seront faites avec [3] chiffres significatifs.

On photographie une personne mesurant 1,8 m depuis une distance de 10 m. L'appareil photographique est constitué d'un objectif et d'un capteur CCD de largeur $L = 50$ mm portant des photodiodes (= photorécepteurs) de diamètre $\delta = 50 \mu\text{m}$. Le réglage de mise au point

est réalisé en ajustant la distance entre ces deux éléments.

Objectif standard

L'appareil photographique est équipé d'un objectif standard assimilé à une lentille convergente de distance focale $f' = 10$ cm, accolée à un diaphragme circulaire de rayon $R = 2,0$ cm.



24. À quelle distance D du centre de la lentille doit-on placer le capteur CCD pour effectuer la mise au point?
Soit A un point de l'objet situé sur l'axe optique et A' son image. Par définition de D et convention sur les longueurs algébriques,

$$\overline{OA'} = D \text{ et } \overline{OA} = -10 \text{ m d'après l'énoncé. D'après la formule de conjugaison de Descartes, } D = \frac{f' \overline{OA}}{\overline{OA} + f'} \quad [1/1]$$

A.N : $D = 10,10$ cm (calcul nécessitant au moins 3cs vu que le calcul demandé plus loin $D - f'$ n'a pas de sens avec 2cs) [1/1]

25. Déterminer l'expression, puis la valeur numérique, de la taille de l'image de la personne sur le capteur CCD.

Formule du grandissement ou par Thalès : $\overline{A'B'} = \overline{AB} \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}}$ [1/1]

A.N : $|\overline{A'B'}| = 1,8 \times 10,1/10 = 1,82$ cm [1/1]

On considère maintenant un objet situé à l'infini sur l'axe optique, et **on ne modifie pas le réglage**.

26. Où se situe l'image de cet objet par l'objectif?

Confondu avec le PF image de l'objectif. [1/1]

27. Représenter cette situation sur un schéma.

=>| Représenter des rayons parallèles à l'axe optique, passant par les bords de la lentille, convergeant en F' . Les rayons se poursuivent sur l'écran situé légèrement derrière, formant une tache. [2/2]

28. Déterminer l'expression, puis la valeur numérique du diamètre de la tache sur le capteur CCD en fonction de R , D et f' . (On pourra utiliser un célèbre théorème mathématique appris au collège ...).

Thalès sur les deux triangles partageant comme sommet f' . On appelle d le diamètre de la tache (à placer sur le schéma) :

$$d/2R = (D - f')/f' \text{ . A.N. } d = 0,01 \times 2 = 0,2 \text{ mm. } [2/2]$$

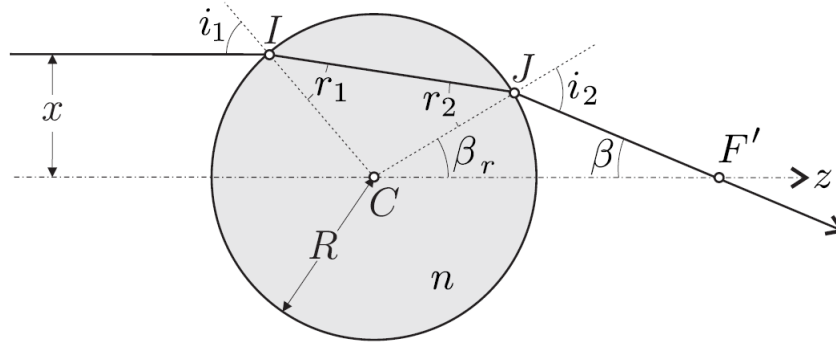
29. L'image apparaîtra-t-elle nette ou floue sur le capteur? La justification doit être rigoureuse et accompagnée d'un ou plusieurs schémas clairs et soignés.

Il faut au moins représenter sur un même schéma la taille de la tache et la taille d'un pixel. d est 4 fois plus grand que la taille d'un pixel $\delta = 0,05$ mm, l'image apparaît donc floue. [2/2]

5 Premier microscope : lentille boule

Le premier microscope de Van Leeuwenhoek, était rudimentaire et reposait sur l'utilisation d'une seule lentille boule. Après polissage d'une goutte de silice fondue, Van Leeuwenhoek, obtint des lentilles boule de rayon $R = 0,60$ mm de centre C . L'indice optique de la silice sera noté n , les foyers objet et image de la lentille sont respectivement notés F et F' .

Sur la figure ci-contre est représenté la trajectoire d'un rayon lumineux initialement parallèle à l'axe optique (Cz) se propageant dans une lentille boule d'indice optique n placée dans l'air d'indice unitaire. Les rayons incidents et émergents se coupent dans un plan passant par C , perpendiculaire à l'axe (Cz). L'étude sera menée dans l'approximation de Gauss (on pourra utiliser les développements limités du type $\sin(\theta) \simeq \tan(\theta) \simeq \theta$ pour $\theta \ll 1$). Les angles formés entre les rayons lumineux et les normales aux dioptries sont notés i_1 , au point I en entrée de la lentille et i_2 à l'extérieur de la lentille au point J , en sortie. De même, les angles intérieurs seront notés r_1 et r_2 . L'angle $\widehat{F'CI}$ est noté β_r et l'angle de déviation \widehat{CFJ} sera noté β .



30. Rappelez les conditions de Gauss. Quel(s) angle(s) sera(seront) faible d'après le schéma dans ces conditions? (aide : visualiser l'impact d'une diminution de x)

Rayons paraxiaux : les rayons forment de faibles angles avec l'axe optique et sont proches de celui-ci. β sera faible, ainsi que tous les autres si on considère la proximité à l'axe veut dire $x \ll R$ [/1]

31. Déterminer la relation entre i_1 et i_2 .

Le triangle ICJ est isocèle, ce qui assure $r_1 = r_2$. [/1]

D'après la loi de Snell-Descartes sur la réfraction en I et J :

$$\underbrace{\sin(i_1)}_{\text{S.-D. en I}} \approx \underbrace{n \sin(r_1)}_{r_1=r_2} \approx \underbrace{n \sin(r_2)}_{\text{S.-D. en J}} \approx \sin(i_2), \quad [/1]$$

soit $i_1 = i_2$ [/0] (vu que les angles sont compris entre 0 et $\pi/2$ [/+1]).

32. Exprimer i_1 en fonction de x et R . Exprimer β_r en fonction de i_1 et n , puis en fonction de x , R et n .

Soit H la projection de I sur l'axe (Cz). L'angle $\widehat{HCI} = i_1$ vu que le rayon incident est parallèle à l'axe optique. Le triangle HCI rectangle en C permet d'écrire $\sin(i_1) = x/R$. [/1]

$\beta_r = i_2 - D$ avec D l'angle de déviation (rappel $i_1 = i_2$ et $r_1 = r_2$). D'après le schéma (à faire sur la copie) $D = (i_1 - r_1) + (i_2 - r_2) = 2(i_1 - r_1)$ soit $\beta_r = 2r_1 - i_1$ (r_1 s'exprime en fonction de i_1 et n via S.-D.). Dans le cas de rayons paraxiaux : $n \sin(r_1) \approx nr_1 \approx i_1$, soit

$$\beta_r \approx i_1 \left(\frac{2}{n} - 1 \right) \approx \frac{x}{R} \left(\frac{2}{n} - 1 \right). \quad [/1]$$

33. Exprimer β en fonction de i_1 et β_r puis de x , R et n .

Le triangle CJF' permet d'écrire $\beta + \beta_r + (\pi - i_2) = \pi$ soit $\beta = i_1 - \beta_r$,

$$\beta \approx \frac{2x}{R} \left(1 - \frac{1}{n} \right) [/1]$$

(On retrouve le fait que $\beta = 0$ si $n = 1$, donc qu'il n'y a pas de modification de la trajectoire du rayon s'il n'y a pas de dioptre, ce qui est rassurant).

34. En déduire la distance focale f' définie comme la distance CF' sur la figure en fonction n et R .

Soit H' la projection de J sur (Cz). $\sin(\beta_r) = JH'/R$ et $\tan(\beta_r) = JH'/CH'$. Comme $\beta_r \ll 1$, $CH' \approx R$. Pour le triangle H'JF', $\tan(\beta) \approx \beta \approx H'J/H'F'$. $CF' = CH' + H'F' \approx R + R\beta_r/\beta$ soit

$$f' \approx \frac{nR}{2(n-1)}$$

[/2]

35. Estimer enfin numériquement f' en prenant $n = 1,5$. Commenter.

A.N : 0,9 mm, soit une distance focale extrêmement faible. C'est l'ordre de grandeur des objectifs à immersion. [/1]

6 Analyse dimensionnelle

On cherche à déterminer la hauteur maximale d'une montagne qu'une planète peut avoir. Une première approche consiste à construire une équation aux dimensions en utilisant les paramètres physiques du problème. On suppose que la montagne a une hauteur caractéristique H et qu'elle est soumise à une accélération de pesanteur g . On considère que sous l'effet de son propre poids, la roche située à sa base peut fondre et limite la taille maximale atteinte. Cela ferait ainsi intervenir dans le problème la chaleur latente de fusion de la roche noté L , homogène à une énergie par unité de masse, ainsi que sa masse volumique ρ (ces deux quantités sont propres à la roche).

36. Donner la dimension des grandeurs intervenant dans le problème.

$$\dim(H) = L, \dim(L) = L^2 \cdot T^{-2}, \dim(\rho) = M \cdot L^{-3}, \dim(g) = L \cdot T^{-2}. \quad [/1]$$

37. Construire par une équation aux dimension avec ρ , g et L une grandeur homogène à H . En déduire une expression de H en fonction des grandeurs du problème.

$$\text{Résultat : } H = k \frac{L}{g} \text{ avec } k \text{ une constante sans dimension. } [/1]$$

38. L'accélération de la pesanteur est 2.6 fois plus faible sur Mars que sur la Terre. En déduire, à partir de vos connaissances (la plus haute montagne sur Terre culmine à ...), quelle peut être la taille maximale d'une montagne sur Mars (on supposera identique les roches sur Mars et sur Terre). Comparez ce résultat à la hauteur du Mont Olympus sur Mars, culminant à 22 km de haut.

D'après le résultat précédent, en supposant une même chaleur latente de fusion de roche sur Terre et sur Mars, vu que k est une constante ne dépendant pas des grandeurs physiques du problème, $H_{\text{Terre}}g_{\text{Terre}} = H_{\text{Mars}}g_{\text{Mars}}$. Le mont Everest culmine à 9000 m environ (8849 m) et $g_{\text{Terre}}/g_{\text{Mars}} = 2.6$, ce qui donne $H_{\text{Mars}} \approx 23 \text{ km}$. La hauteur du Mont Olympus est effectivement proche de cette valeur. [/1]

L'accélération de la pesanteur d'une planète de masse M et de rayon R vérifie :

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

39. En supposant une planète sphérique et de masse volumique ρ , en déduire le rapport des rayons entre la Terre et Mars. Exprimer le rapport des hauteurs des montagnes en fonctions du rapport des rayons des planètes.

Volume d'une sphère en fonction de son rayon R : $\frac{4}{3}\pi R^3$. Masse de cette sphère supposée homogène : $M = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$. Soit $g = \frac{4G\rho\pi R}{3}$.

En supposant Mars et la Terre de même masse volumique, on en déduit

$$\frac{g_{\text{Terre}}}{g_{\text{Mars}}} = \frac{R_{\text{Terre}}}{R_{\text{Mars}}},$$

soit un rayon terrestre 2.6 fois plus grand que celui de Mars (ce n'est pas vraiment le cas, il faut revoir l'hypothèse sur l'homogénéité!) [/1].

40. Déterminer le rayon de la planète fictive Krypton (celle de Superman!) où la gravité y est 16 fois supérieure à celle de la Terre. Quelle est la hauteur de la plus haute montagne de Krypton?

En supposant la Terre et Krypton deux planètes boules homogènes, $R_{\text{Krypton}} = 6300 \times 16 \approx 10^5 \text{ km}$ (2 fois celui de Saturne!!!). La plus haute montagne de Krypton est entre 500 et 600 m d'altitude (9000/16), moins que certaines tours de construction humaine. Sur Terre, Superman a certainement le vertige en haute montagne... [/1]