Chapitre

17 Cinématique du point et du solide

1 Introduction

La cinématique est l'étude de la description d'un mouvement sans s'intéresser à ses causes. Toutes les unités physiques qui s'y rattachent s'expriment uniquement à partir de durées et de longueurs. On oppose la cinématique à la dynamique, domaine de la physique qui s'intéresse aux causes du déplacement : les forces exercées sur un système ne rentrent pas dans le cadre de la cinématique. Dans toutes la suite nous allons supposer que le temps s'écoule de manière uniforme à chaque position de l'espace : pour que cette hypothèse soit valide il faut que les vitesses entre observateurs soient faibles et que les masses ou les temps considérés ne soient pas trop grands, c'est le cadre de la mécanique Newtonienne, cadre dans lequel nous allons nous placer.

2 Repérer un solide dans l'espace

L'espace considéré en mécanique Newtonienne est celui que nous avons l'habitude de manipuler, à savoir un espace statique à trois dimensions [1] dans lequel les objets se déplacent. Pour repérer la position, la vitesse et l'accélération d'un solide dans cet espace, il faut être rigoureux sur les définitions. Voyons à quoi un manque de rigueur peut conduire.

Exercice 17.1

Un cycliste roule à une vitesse de 30 km/h. Quelle est la vitesse de la roue de diamètre 1 m ? En quoi la question précédente est incomplète ? Quelle est la forme de la trajectoire du centre de la roue et celle d'un grain de sable à sa surface ?

Remarque : On voit que la notion de vitesse et de position diffère d'un point à un autre du solide.

Repérer un solide dans l'espace c'est connaître la position et la vitesse de chacun de ses points. Pour simplifier l'étude, nous n'allons traiter que le cas idéalisé du solide indéformable (n'imaginez pas pouvoir traiter précisément le mouvement réel d'un ballon de foot après avoir tapé dedans de manière simple, i.e. sans outils numériques).

Définition 1 - Solide indéformable

Solide idéalisé dans lequel la distance entre deux points quelconques de celui-ci ne varie pas.

Remarque : Est-ce qu'un solide indéformable peut exister ? **vidéo chutte slinky**.

Propriété 1

La connaissance de la position et de la vitesse de trois points différents appartenant à un solide indéformable suffisent pour décrire le positionnement et la vitesse de chaque point lui appartenant.

Remarque : Il peut exister des points géométriques naturels que l'on va privilégier pour repérer un solide, comme par exemple : un centre de symétrie pour une sphère, le centre de symétrie d'une roue, etc.

En physique, comme les points pour repérer un solide sont liés à un corps physique (pourvu d'une masse) dans un espace physique, on les appelle des points matériels, par opposition aux points géométriques de consistance abstraite.

Conclusion : Repérer un solide revient simplement à savoir repérer un point matériel.

2.1 Référentiel, base et repère

Définition 2 - Référentiel

Un référentiel $\mathcal{R}$ est défini par la donné d'un point O appelé origine, d'une horloge et d'autant d'axes fixes par rapport à O que le problème en nécessite (au maximum 3 = nombre de dimension d'espace), le tout lié à un solide indéformable.

1. Ce n'est plus la vision actuelle où espace et temps sont liés, et où la matière agit sur cet espace et inversement. Dans ce cas, il faudra changer le repérage d'un point dans l'espace en changer la géométrie utilisée (géométrie non Euclidienne). Cela sort du cadre de la CPGE.

Remarque : Comme la notion de solide indéformable est une idéalisation de la réalité, la notion de référentiel l'est aussi. Par exemple, le **référentiel héliocentrique** positionne l'origine au centre du soleil et les axes qui restent orientés dans la même direction par rapport aux galaxies lointaines. Or toutes les galaxies sont en mouvement les unes par rapport aux autres, donc les axes ne sont pas fixes. Cependant, ils le sont suffisamment sur des échelles de temps courtes, celle des expériences menées en laboratoire.

Définition 3 - Base de l'espace orthonormée

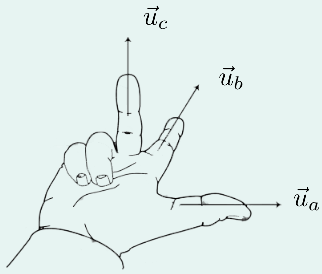
Une **base** de l'espace est un ensemble de 3 vecteurs non coplanaires. Elle est **normée** lorsque ces vecteurs sont unitaires (de norme 1) et **orthonormée** lorsqu'ils sont en plus orthogonaux deux à deux.

Exercice 17.2

Soit $(\vec{u}_a, \vec{u}_b, \vec{u}_c)$ une base orthonormé. Ecrire les relations mathématiques qu'ils vérifient.

Convention 1 - Orientation directe ou indirecte

Soit $(\vec{u}_a, \vec{u}_b, \vec{u}_c)$ une base orthonormé. Si les vecteurs sont associables, dans cet ordre, au pouce, à l'indexe et au majeur de la main droite tel que représenté sur le schéma (pouce et indexe tendus, majeur relevé), alors la base est dite directe. Elle est indirecte sinon.



Convention 2 - Dessin

Pour dessiner une base sur une feuille, nous pouvons représenter un vecteur perpendiculaire au plan d'une feuille pointant dans notre direction par le symbole $\odot$. Pour un vecteur pointant dans l'autre sens le symbole est $\otimes$.

Définition 4 - Repère

Un repère est l'association d'un référentiel et d'une base, généralement orthonormée directe.

Remarque : Il existe une infinité de repères pour un référentiel donné. La base n'est pas forcément fixe par rapport au repère.

Exercice 17.3

Nous souhaitons attribuer un repère à une grande roue pour étudier le comportement d'une nacelle.

1. Quels choix de référentiel peut-on faire ?
2. Quelles bases peut on attribuer à ce référentiel ? Sont-elles toutes fixes par rapport au référentiel choisi ?

Solution : Un choix judicieux de référentiel serait de prendre comme solide associé la structure en forme de roue et de choisir comme origine son centre. Rien n'empêche cependant de prendre comme référentiel le sol sur lequel s'appuie la roue (référentiel terrestre) et de prendre une origine quelconque du sol (un point au sol en dessous du centre de la roue par exemple). Les bases que l'on peut attribuer sont nombreuses : une base fixe par rapport à la roue, fixe par rapport à une nacelle (donc fixe par rapport à toutes les autres) ou fixe par rapport au sol. Elles ne sont donc pas toutes fixes par rapport au référentiel.

Remarque : Le choix du repère est intimement lié à l'étude du mouvement d'un solide par rapport à un autre. Typiquement si on étudie le mouvement d'un carrousel, on étudie un solide en rotation, le carrousel, par rapport à un autre solide, le sol. Le référentiel utilisé sera celui dans lequel la dynamique sera plus simple à traiter, le sol (référentiel supposé galiléen) et il sera judicieux de choisir une base fixe par rapport au carrousel (donc en rotation par rapport au référentiel).

2.2 Repère et coordonnées cartésiennes

Définition 5 - Repère cartésien

Le repère cartésien est celui dont la base est fixe par rapport au référentiel associé. On note généralement la base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ ou alors $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Remarque : Sur un dessin, un vecteur peut être représenté où bon vous semble, un vecteur n'est pas obligatoirement lié à un point, il est lié à une différence entre deux points. Parfois, pour plus de lisibilité, on décale la représentation de la base sur un bord du schéma.

Définition 6 - Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées d'un point matériel M dans un repère cartésien son données par rapport aux axes (Ox), (Oy), et (Oz). L'orientation et le sens de ces axes sont définis respectivement par les vecteurs $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ du repère et ils passent tous par l'origine O du repère. Ainsi on attribue au point M trois coordonnées d'espace : $M(x,y,z)$

Rappel : La dénomination "matériel" sous-entend que le point M est rattaché à un solide matériel, il a donc une existence physique.

Exercice 17.4 - Réduction des variables

Prenons le mouvement d'une bille en ligne droite dans un référentiel donné. Comment doit-on choisir la base associée et pourquoi ?
Conclusion : Le choix des axes de la base peut permettre de réduire le nombre de variables à considérer.

2.3 Vecteur position, vitesse et accélération

Définition 7 - Vecteur position dans un référentiel

On définit le **vecteur position** d'un point matériel noté M dans un référentiel $\mathcal{R}$ le vecteur

$$\vec{r}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM},$$

le point O étant l'origine du référentiel.

Exemple

Le vecteur position dans un repère aux coordonnées cartésiennes s'écrit : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$. La notation vectorielle permet d'écrire de façon simple la position du point M. Pour retrouver la coordonnée x il suffit de projeter $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe (Ox) et par conséquent de faire l'opération $\overrightarrow{OM}.\vec{u}_x$. Pour trouver la distance OM il suffit de faire la norme du vecteur position $\| \overrightarrow{OM} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Définition 8 - Dérivation vectorielle dans un référentiel

Dériver temporellement un vecteur $\overrightarrow{A}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ revient à dériver temporellement chacune des composantes de celui-ci projetée sur une base fixe par rapport au référentiel. On note ce vecteur $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$.

Exemple

Si $\overrightarrow{A} = a\vec{u}_a + b\vec{u}_b$, avec une base fixe $(\vec{u}_a,b\vec{u}_b)$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$, la dérivée vectorielle de $\overrightarrow{A}$ dans ce référentiel s'écrit $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\vec{u}_a + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\vec{u}_b$.

Définition 9 - Vecteur vitesse dans un référentiel

Vecteur caractérisant la vitesse d'un point matériel noté M par rapport au référentiel d'étude $\mathcal{R}$ vérifiant :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}},$$

le point O étant l'origine du référentiel.

Exemple

Le vecteur vitesse dans un repère aux coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z.$$

En effet les vecteurs sont ici indépendants du temps dans ce référentiel car ils sont liés au référentiel. S'il ne l'était pas, nous aurions pour une base $(\vec{u}_a,\vec{u}_b,\vec{u}_c)$ qui dépend du temps l'expression suivante pour la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM} = a\vec{u}_a + b\vec{u}_b + c\vec{u}_c$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\vec{u}_a + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\vec{u}_b + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\vec{u}_c + a\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}_a}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + b\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}_b}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + c\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}_c}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}.$$

Exercice 17.5

Prenons un objet en mouvement constant, circulaire et plan dans un référentiel donné. On peut se représenter un grain de sable sur une roue de vélo que l'on fait tourner dans le vide (centre de la roue fixe par rapport au sol).

1. En prenant un référentiel ayant pour origine le centre de la roue, choisir une base cartésienne permettant de n'utiliser que deux coordonnées (x,y) pour décrire la position du point matériel représentant l'objet. En notant r la distance OM et θ l'angle orienté entre l'axe (Ox) et le vecteur position, exprimer x et y en fonction de r et θ.
2. Exprimer le vecteur vitesse du point matériel dans ce référentiel et dans cette base.
3. Soit $\vec{u}_r$ un vecteur unitaire colinéaire au vecteur position du point matériel. Montrer que l'on peut mettre sous la forme $r\vec{u}_r$ son vecteur position et exprimer r en fonction des coordonnées cartésiennes et $\vec{u}_r$ en fonction des vecteurs de la base cartésienne.
4. Quelle propriété particulière vérifie r ? Quel est l'avantage et l'inconvénient d'exprimer le vecteur position sous cette forme ?
5. En obtenant le vecteur vitesse à partir de la forme $r\vec{u}_r$ quel nouveau vecteur unitaire apparaît ? On le notera $\vec{u}_\theta$. Dessiner ces deux vecteur sur un schéma.
6. Vérifier que la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est bien une base orthonormée directe.

Définition 10 - Vecteur accélération dans un référentiel

Vecteur caractérisant l'accélération d'un point matériel noté M par rapport au référentiel d'étude $\mathcal{R}$ vérifiant :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}.$$

Exercice 17.6

Reprenons le cas d'un objet en mouvement circulaire dans un référentiel donné. Exprimer le vecteur accélération dans la base cartésienne et dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

2.4 Vecteur vitesse et accélération le long d'une trajectoire

Définition 11 - Trajectoire

La trajectoire d'un point matériel est l'ensemble des points occupés successivement par celui-ci au cours du temps et dans un référentiel donné.

Propriété 2 - vecteur vitesse et accélération le long d'une trajectoire

Soit M un point matériel possédant une trajectoire dans un référentiel donné.

- ☆ A tout instant, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire du point M.
- ☆ A tout instant, le vecteur accélération se décompose en une composante tangente à la trajectoire du point M, égale à la dérivée de la norme du vecteur vitesse, et d'une composante normale au vecteur vitesse et orienté dans la courbure de la trajectoire (égale à v^2/r où r est le rayon de courbure local de la trajectoire).

Exercice 17.7

Pour une trajectoire circulaire de rayon r et de vitesse angulaire ω constants, vérifier que le vecteur vitesse soit tangent à la trajectoire et que le vecteur accélération soit orienté dans le sens de la courbure et de norme v^2/r.

3 Cinématique expérimentale : la chronophotographie

3.1 Vitesse et accélération, moyenne et instantanée

Expérimentalement nous n'avons pas accès au vecteur vitesse et accélération instantané mais au taux d'accroissement du vecteur position. Nous ne pouvons pas avoir accès à la trajectoire d'un point matériel mais uniquement à la position de ce point à des instants précis (image en rafale ou vidéo). Prenons par exemple deux points notés M et M' situés dans un référentiel d'origine notée O correspondant respectivement à la position d'un point matériel à l'instant t et $t + \Delta t$ (Δt est la durée entre ces deux instants). Le vecteur

$$\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

correspond à un vecteur vitesse moyenne qui tend vers le vecteur vitesse instantané pour $\Delta t \to 0$. Pour s'en apercevoir, nous pouvons exprimer ce vecteur dans une base cartésienne associée au référentiel :

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} &= \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} \\ &= \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\right)\vec{u}_z\end{aligned} \tag{3.1}$$

La projection suivant chaque axe du repère de ce vecteur correspond donc au taux d'accroissement de la coordonnée suivant l'axe considéré. Dans la limite Δt tendant vers 0, cela correspond à la dérivée de la coordonnée : on retrouve bien le vecteur vitesse instantané. Nos observations ne nous permettent pas d'avoir accès à la trajectoire. Nous pouvons seulement obtenir quelques positions empruntés par le point matériel au cours du temps. Trajectoire, vecteur vitesse et accélération instantané sont donc des concepts théoriques. Elle correspondent à la valeur vraie vers laquelle on tend si on utilisait un instrument de mesure infiniment rapide.

De même pour obtenir une accélération on utilise un troisième point M" pris par le point matériel à l'instant $t + 2\Delta t$:

$$\frac{\frac{\overrightarrow{M'M''}}{\Delta t} - \frac{\overrightarrow{M'M}}{\Delta t}}{\Delta t}$$

Exercice 17.8

A partir de la chronophotographie à votre disposition représentant un point matériel en mouvement circulaire uniforme, représenter un vecteur vitesse et accélération à l'aide de trois position successives de celui-ci.

Remarque : pour cette chronophotographie, le vecteur vitesse n'est pas tangent à la trajectoire réelle et le vecteur accélération ne pointe pas vers le centre de la trajectoire circulaire.

Simulation : influence du temps entre deux prises de vues sur le vecteur vitesse et accélération.

3.2 Vol balistique

Prenons l'exemple d'un vol balistique sans frottements. Les équations du mouvement dans un référentiel terrestre supposé Galiléen s'écrivent en coordonnées cartésiennes usuelles (accélération suivant $-\vec{u}_z$ et mouvement dans le plan (Oxz)) :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z,0}t + z_0$$
$$x(t) = v_{x,0}t + x_0$$

Simulation : influence du temps entre deux prises de vues sur le vecteur vitesse et accélération pour un vol balistique. **Remarque :** la prise de vue n'a pas d'influence sur le vecteur accélération, qui pointe toujours vers le bas.

Exercice 17.9

Montrer que le vecteur accélération obtenu avec une chronophotographie reste dans la direction de $-\vec{u}_z$ avec pour norme g, peut importe le temps entre deux photographies.

Expérience : étude qualitative de la vidéo d'un ballon en vol balistique réel. Présence de forces de frottement.
Expérience : étude quantitative d'une chronophotographie d'un volant de badminton en vol balistique réel. Présence de forces de frottement. Décomposition de la trajectoire. Modélisation d'un effet non linéaire.

3.3 Mouvement quelconque

Exercice 17.10

Donner le maximum d'information sur la chronophotographie du golfeur.
Indices : le mouvement est-il plan à tout instant ? En décomposant le mouvement peut-on tirer une information sur le moment ou le club heurte la balle ?

4 Systèmes de coordonnées usuels

Voici notre cadre d'étude : soit $\mathcal{R}$ un référentiel, O son origine. Nous lui associons une base cartésienne et associons à un point matériel quelconque noté M les coordonnées cartésiennes usuelles $M(x,y,z)$ et le vecteur position dans cette base s'écrit : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$.

4.1 Coordonnées cylindriques

Vecteur position

Pour décrire un mouvement circulaire il était intéressant de se placer dans la base polaire. On utilise généralement cette base pour les mouvement de rotation. On peut généraliser cette base aux trois dimensions d'espace et former la base cylindro-polaire orthonormée directe $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$, avec θ l'angle entre $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_x$. Ainsi, la position du point M dans cette base est repérée par les quantités (r,θ,z).

Propriété 3

Le vecteur position exprimé en coordonnées cylindrique s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z.$$

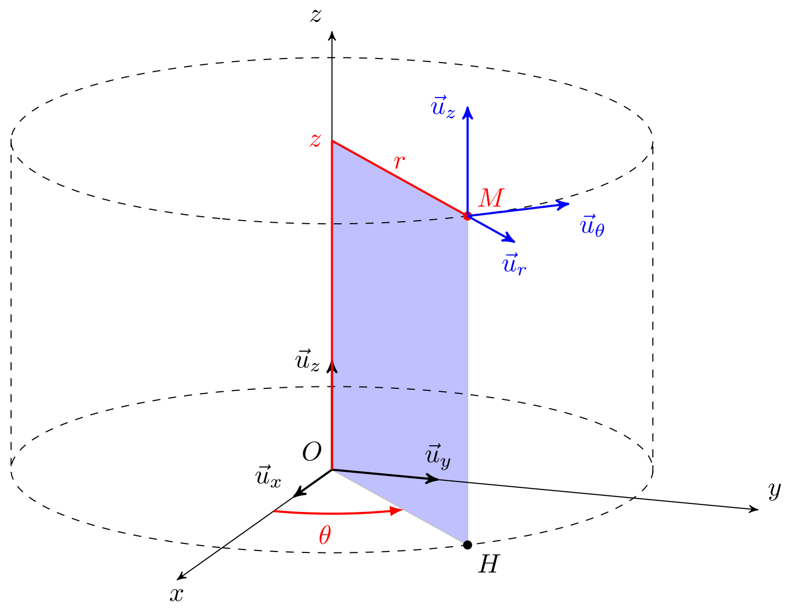


FIG. 17.1 – Représentation des coordonnées cylindriques.

Déplacement élémentaire

La dérivée d'un vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps est une notion importante en physique. Plus généralement, on utilise la notion de déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}}$, qui représente un petit déplacement du point M. Dans le système de coordonnées cartésiennes, ce déplacement élémentaire correspond à :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z.$$

Essayons d'exprimer ce déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques. On s'aperçoit que le vecteur radial ne dépend que du paramètre θ, son expression dans la base cartésienne étant $\vec{u}_r = \cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y$. Si on dérive ce vecteur par rapport à θ dans le référentiel $\mathcal{R}$ on trouve le vecteur ortho-radial $\vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y$.

Exercice 17.11

Calculer $\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\mathcal{R}}$.

Le vecteur déplacement élémentaire est alors simple à calculer :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z.$$

Remarque : Le déplacement élémentaire apparaît comme la somme de trois déplacements élémentaires que l'on obtiendrait si l'on faisait varier une à une les trois coordonnées.

4.2 Coordonnées sphériques

Vecteur position

Le point M dans une base sphérique est repérée par les quantités (r,θ,φ) représentant respectivement la distance par rapport au centre, la colatitude et la longitude.

Propriété 4

Le vecteur position exprimé en coordonnées sphérique s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

Déplacement élémentaire

Propriété 5

Le vecteur déplacement élémentaire en base sphérique s'écrit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi.$$

5 Translation et rotations des solides

Définition 12 - Translations et rotation par rapport à un axe

Dans un référentiel donné, un solide effectue un mouvement de :

- ☆ translation si les trajectoires de ces points se déduisent les une des autres par translation. La translation est rectiligne si les trajectoires décrivent des droites, elle est circulaire si les trajectoires décrivent des cercles.
- ☆ de rotation par rapport à un axe fixe si le mouvement de chaque point est circulaire autour de son projeté orthogonal sur l'axe de rotation.

Exercice 17.12

Reprenons l'exemple de la grande roue. Comment décrire la trajectoire de la structure de la roue dans le référentiel terrestre ? Celui d'une nacelle ?

Exercice 17.13

On se place dans un carrousel qui fait un tour sur lui même en 10 secondes. Que est le type de mouvement que l'on effectue par rapport au sol si on reste fixe dans le carrousel ? Quel est la vitesse ressentie par une personne à un mètre de distance de l'axe de rotation ? A deux mètres ? Comment écrire la vitesse de tout point de la structure ?