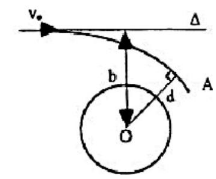
Mécanique

1 Chute d'une météorite



Une météorite de masse m, très loin de la Terre, a une vitesse $\vec{v_0}$ de module v_0 portée par une droite Δ située à une distance b du centre O de la Terre. On suppose que le météorite est soumis uniquement au champ gravitationnel terrestre et qu'il n'y a jamais de forces de frottement. Soit A le point de la trajectoire tel que la distance Terre - Météorite soit minimale. On note $OA = d$.
On supposera que la Terre reste immobile dans un référentiel galiléen. On veut déterminer à partir de quelle valeur de b le météorite s'écrasera sur la Terre. On notera G la constante de gravitation, M la masse de la Terre, supposée sphérique, homogène, de masse volumique ρ, de rayon R.

1. Donner l'expression de la force de gravitation en un point P de la trajectoire tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$. Calculer l'énergie potentielle $E_p(r)$ du météorite en ce point. On prendra $E_p(\infty) = 0$.
2. Quelles sont les grandeurs physiques conservées au cours du mouvement ? Justifier. En déduire que la trajectoire est plane.
3. Donner l'expression de la vitesse en coordonnées polaires. Montrer qu'en A, point de la trajectoire le plus proche de O, la vitesse (de norme v_1) est orthogonale à OA.
4. En vous appuyant sur la question 2 , trouver deux relations liant b, d, G, M, v_0, v_1.

En déduire l'expression de d en fonction de G, M, b, v_0.

5. Soit R le rayon de la Terre. Quelle condition doit satisfaire b pour que le météorite de vitesse initiale $\vec{v}_0$ rencontre la Terre ?

2 Lancer d'un satellite - version 1

On désire envoyer un satellite météo, de masse $m = 400$ kg sur une orbite géostationnaire d'altitude $h' = 36.10^3$ km.
La mission se divise en 4 étapes :

— Le décollage depuis une base spatiale ;
— une mise en orbite basse circulaire $h = 6.10^2$ km ;
— un passage par une orbite de transfert elliptique $a = \frac{r_b + T_G}{2}$;
— la mise en orbite géostationnaire définitive $h' = 36.10^3$ km.

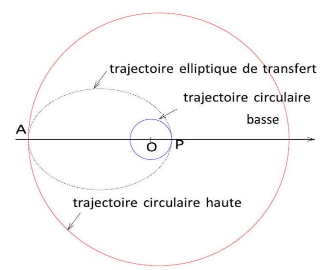


FIGURE 1 – Trajectoires prises par un satellite mis en orbite géostationnaire.

1. Les lanceurs (ou fusées) sont tirés dans l'espace depuis des bases situées à des latitudes variées : Cap Canaveral aux Etats-Unis ($\lambda_1 = 28,5°$), Pletsek en Russie ($\lambda_2 = 63°$), Baikonour dans le Kazakhstan ($\lambda_3 = 46,3°$), Tanegashima au Japon ($\lambda_4 = 30,5°$) et Kourou en Guyane Française ($\lambda_5 = 5,2°$). La fusée étant fixée au sol, calculer la norme v de sa vitesse, par rapport au référentiel géocentrique. La vitesse angulaire terrestre étant $\omega_T = 7,29.10^{-5}$ rad. s^{-1} autour de son axe sud-nord. Commenter.
2. La Terre exerce une force newtonienne sur le satellite. Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_{m,b}$ du satellite en orbite basse. En déduire le travail que doit fournir la fusée pour mettre en orbite basse le satellite.

Rappelons que l'énergie mécanique d'un système soumis à une force centrale newtonienne suivant une trajectoire elliptique est $E_m = -\frac{\kappa}{2a}$. On accélère la fusée afin d'atteindre l'orbite de transfert.

3. Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_{m,t}$ de la fusée lorsqu'elle suit l'orbite de transfert. Quel travail doit fournir la fusée pour passer de l'orbite basse à l'orbite de transfert.
4. Déduire des deux question précédente la différence de vitesse en P pour passer de l'orbite basse à l'orbite de transfert.
5. Le satellite arrive au niveau de l'orbite géostationnaire. Doit-on accélérer ou ralentir le satellite ? Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_{m,g}$ de la fusée lorsqu'elle suit l'orbite géostationnaire. Quelle travail doit fournir la fusée pour passer de l'orbite de transfert à l'orbite géostationnaire. En déduire la différence de vitesse en A pour effectuer ce changement d'orbite.

3 Lancer d'un satellite - version 2

3.1 Moment cinétique du satellite

1. La position du satellite est repérée par le point M de coordonnées $(r(t), \theta(t), z=0)$. Déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M}$ dans la base $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \vec{k}\right)$ en fonction de r, θ et de leurs dérivées éventuelles.
2. On note $g_0 = 10\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ la norme de l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. L'énergie potentielle $\mathrm{E_p}(r)$ associée à l'interaction gravitationnelle $\vec{F}$ s'exprime sous la forme $\mathrm{E_p}(r) = -g_0 m \frac{R_T^2}{r}$.

   En déduire l'expression de l'interaction $\vec{F}$ exercée par la Terre sur le satellite en fonction de $g_0, m, \mathrm{R_T}$ et r. L'interaction gravitationnelle est-elle attractive ou répulsive ? Dans la suite, on supposera que le satellite est soumis uniquement à $\vec{F}$.
3. Soit $\overrightarrow{\mathrm{L_0}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\overrightarrow{v_\mathrm{M}}$. Comment s'appelle cette grandeur mécanique associée au satellite ? Déterminer son expression dans la base $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \vec{k}\right)$ puis sa norme $\mathrm{L_0}$ en fonction de $r, \dot{\theta}$ et m. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{L_O}$ est constant au cours du mouvement.
4. Exprimer pour cette trajectoire circulaire le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{a_M}$ du satellite uniquement en fonction de la quantité $v = r\dot{\theta}$ de sa dérivée temporelle $\dot{v}$ et de r.
5. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que le mouvement est uniforme et exprimer v^2 en fonction de $g_0, \mathrm{R_T}$ et r.

3.2 Étude énergétique du satellite

On suppose ici que la trajectoire du satellite n'est pas nécessairement circulaire.

6. Montrer que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et qu'elle se met sous la forme
   $\mathrm{E_m} = \frac{1}{2}\ \mathrm{m}\dot{r}^2 + \frac{L_O^2}{2mr^2} - g_0\ \mathrm{m}\frac{R_T^2}{r}$
7. On appelle énergie potentielle effective

$$\mathrm{E_{p,eff}}(r) = \mathrm{E_m} - \frac{1}{2}\ \mathrm{m}\dot{r}^2$$

   Au cours du mouvement, les valeurs du rayon r sont données par l'inégalité $\mathrm{E_{p,eff}}(r) \leq \mathrm{E_m}$. Expliquer ce résultat.

Le graphe de $\mathrm{E_{p,eff}}(r)$ pour une valeur donnée de $\mathrm{L_0}$ est représenté figure 2. On montre que la trajectoire du satellite est nécessairement une conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

8. À quelle énergie E_{m1} ou E_{m2} peut correspondre une trajectoire elliptique ? une trajectoire hyperbolique ?
9. Pour quelle valeur particulière de E_m la trajectoire est-elle circulaire ?

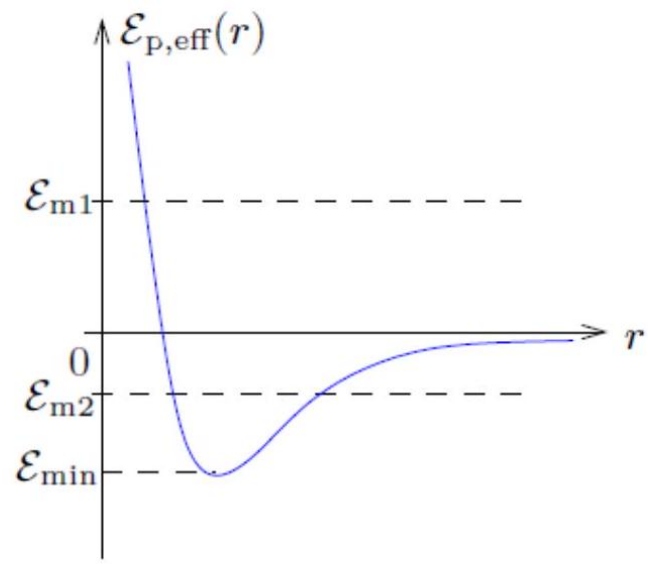


FIGURE 2 – Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r

3.3 Mise en orbite haute du satellite

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une trajectoire circulaire basse $\left(r_\mathrm{b} = 8,0.10^3\ \mathrm{km}\right)$ puis, dans un deuxième temps, sur une trajectoire circulaire haute $\left(r_\mathrm{h} = 40.10^3\ \mathrm{km}\right)$ comme illustré sur la figure 3 ci-contre.
Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre O : son périgée P est situé sur l'orbite basse et son apogée A sur l'orbite haute.
Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer. On considère désormais le satellite parcourant la trajectoire elliptique de transfert.

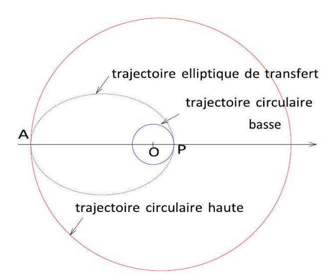


FIGURE 3 – Trajectoires prises par un satellite mis en orbite.

10. Que peut-on dire des valeurs de $\dot{r}$ lorsque le satellite est en $\mathrm{A}\,(r=r_\mathrm{h})$ ou en $\mathrm{P}\,(r=r_\mathrm{b})$? Comment s'exprime le demi-grand axe a de l'ellipse de transfert en fonction de r_b et r_h ?
11. Montrer à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique que r_h et r_b sont solutions d'une équation du second degré de la forme $r^2+\alpha r+\beta=0$.

Exprimer α et β en fonction de $m,\ \mathrm{L}_0, \mathrm{E}_\mathrm{m}, g_0$ et R_T

12. En déterminant la somme des racines de l'équation, en déduire que $\mathrm{E}_{\mathrm{m,t}}=-g_0 m\frac{R_T^2}{2a}$.
13. Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,t}$ du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique. Justifier.

Pour changer de trajectoire le satellite, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase le principe de conservation de l'énergie n'est plus vérifié. Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite.

14. Relever sur la figure 4 la valeur de

De même relever la valeur de l'énergie mécanique $\mathrm{E}_{\mathrm{m,h}}$ du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon $r_\mathrm{h}=40.10^3\ \mathrm{km}$.

15. En déduire la variation d'énergie mécanique ΔE_{mP} à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert. Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est d'environ 50 MJ/kg, déterminer la masse m_c de carburant nécessaire.
16. Connaissez vous un carburant utilisé dans les moteurs-fusées pour l'aérospatiale ? Qu'appelle - t- on orbite géostationnaire ? Connaissez-vous l'altitude de cette orbite ?

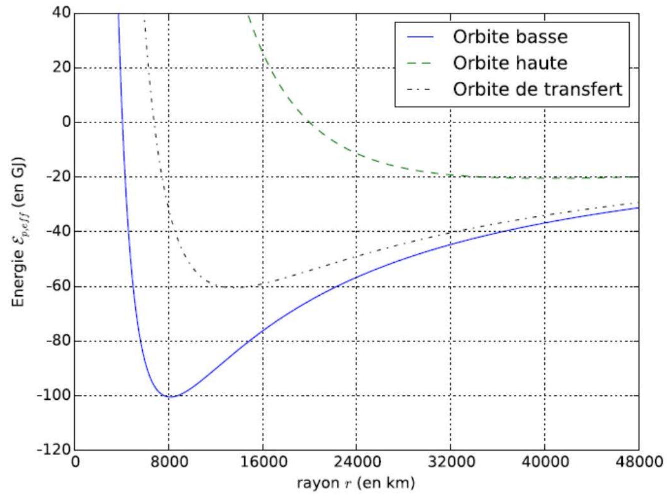


FIGURE 4 – $\mathcal{E}_{\mathrm{p,eff}}(r)$ pour les 3 orbites l'énergie mécanique $E_{m,b}$ du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon $r_\mathrm{b}=8,0.10^3\ \mathrm{km}$.

4 Chute d'un satellite

Un satellite est en orbite circulaire autour de la Terre à $800\ \mathrm{km}$ d'altitude. Sur cet orbite, on constate que son altitude diminue de $1\ \mathrm{m}$ durant une période. On décrit les frottements avec l'atmosphère par une force de frottement fluide quadratique $\vec{f}=-\alpha m v\vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la vitesse du satellite et m sa masse. Le coefficient α est supposé indépendant de l'altitude du satellite : $\alpha=1,5\cdot10^{-15}\ \mathrm{m}^{-1}$. Au bout de combien de temps l'altitude aura-t-elle baissé de $10\ \mathrm{km}$?
Données : masse de la Terre : $M_T=5,97\cdot10^{24}\ \mathrm{kg}$; rayon terrestre : $R_T=6371\ \mathrm{km}$.

5 Descente en toboggan

Les toboggans font aujourd'hui parti des incontournables d'un centre aquatique. De nombreux toboggans présentent des enroulements plus ou moins complexes. On étudie le toboggan présenté figure 8 et composé d'un enroulement hélicoïdal d'approximativement $n=2,3$ tours. Le rayon moyen est estimé à $R=2,0\ \mathrm{m}$ et la hauteur de l'ensemble est $h=4,0\ \mathrm{m}$. On néglige les frottements.
On note $\theta>0$ la position angulaire du baigneur dans le toboggan relativement à la position de départ, d'altitude h. Le baigneur suit la trajectoire d'équation $r=R, z=\alpha\theta$, l'axe $(z'z)$ étant orienté selon la verticale descendante.

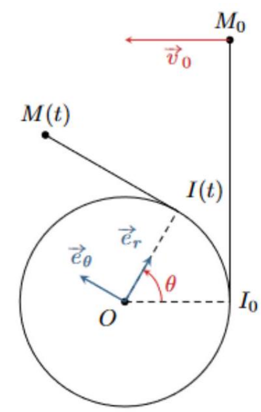
1. Déterminer la valeur de α.
2. Calculer la valeur de la vitesse atteinte en sortie du toboggan, le départ se faisant sans vitesse initiale.
3. Afin d'éviter d'éventuelles collisions, le toboggan est équipé au point de départ d'un feu qui passe au vert toutes les t_f secondes. On impose une marge de $t_m=5\ \mathrm{s}$ en plus de la durée de parcours dans le toboggan. Calculer t_f. On prendra $g=9,8\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

6 Mouvement circulaire avec ressort

On considère une masse, assimilable à un point matériel M de masse m, placée sur un plan horizontal où elle peut se déplacer sans frottement. Elle est reliée par un ressort de raideur k et longueur naturelle ℓ_0 à un point O. À l'instant initial, $OM = L$ et la masse est lancée avec une vitesse $\vec{v}_0$. On cherche comment choisir $\vec{v}_0$ et L pour que le mouvement soit circulaire.

1. Déterminer sans calcul le rayon du cercle et la direction à donner à $\vec{v}_0$.
2. Montrer que si le mouvement est circulaire alors il est également uniforme.
3. En déduire une condition sur L et la valeur à donner à v_0 en fonction de L pour que le mouvement soit circulaire.

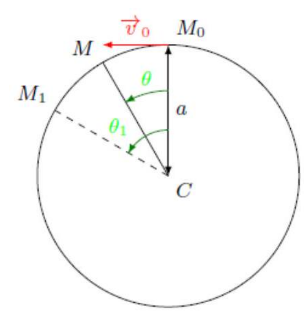
7 Enrouler le fil, dérouler le fil ...



Un fil de longueur L, inextensible et de masse négligeable, est accroché tangentiellement à une bobine plate de rayon R. À l'extrémité libre est accroché un point matériel M, de masse m. L'effet de la pensanteur est négligé.
Le fil est tendu et M lancé dans le plan de la bobine depuis la position M_0, perpendiculairement au fil, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, afin d'enrouler le fil autour de la bobine.
On utilise la base polaire relative au point I, point du fil le plus proche de M à être en contact avec la bobine.

1. Montrer que $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + (L - R\theta)\vec{e}_\theta$. En déduire les composantes de la vitesse et de l'accélération de M dans cette base.
2. En utilisant le PFD, montrer que la vitesse radiale de M est constante. Que vaut cette constante ?
3. En déduire par intégration une relation entre θ et t, puis déterminer la durée totale τ nécessaire pour enrouler le fil en totalité.
4. Établir la loi horaire
$$\theta(t) = \frac{L}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}\right).$$
5. Vérifier que le fil reste tendu tout au long du mouvement.

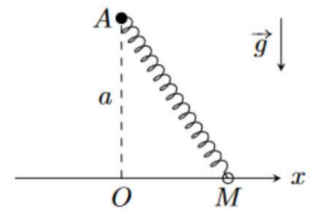
8 Chute d'un palet le long d'une sphère



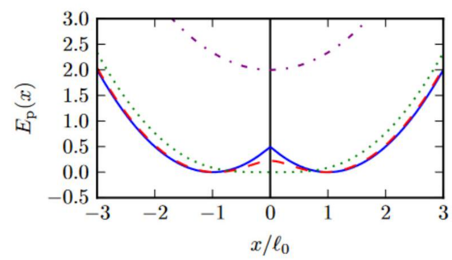
Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen. Un palet, assimilé à un point matériel M de masse m, mobile sur la surface d'une sphère S, de centre C et de rayon a, subit de la part de celle-ci une action de contact sans frottements. Le point M est lâché au sommet de la sphère avec la vitesse v_0, il glisse sur la sphère puis décolle en M_1.

1. Déterminer l'équation du second ordre vérifiée par θ tant que M reste en contact avec la sphère.
2. On pose $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Montrer que l'équation différentielle précédente peut s'écrire $\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta$. Intégrer l'équation différentielle par rapport à θ. En déduire le calcul de la réaction de la sphère.
3. Calculer la réaction à $t = 0$. En déduire que si $v_0 > V$ que l'on déterminera, le point quitte la sphère dès le sommet. On se place dans le cas où $v_0 < V$. Calculer l'angle θ_1 pour lequel M quitte la sphère. Calculer le chemin parcouru sur la sphère par le point lorsque $v_0 = V/2$.

9 Oscillateur de Landau



L'oscillateur de Landau est un modèle théorique permettant de modéliser efficacement des systèmes physiques pour lesquelles des faibles non-linéarités sont à prendre en compte. Il s'agit d'une approximation un peu plus précise que celle de l'oscillateur harmonique pour étudier le comportement de systèmes au voisinage de leur position d'équilibre.
Un exemple de système modèle permettant de réaliser un oscillateur de Landau est un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale choisie comme axe (Ox). Cet anneau est relié à un ressort, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k, dont l'autre extrémité est fixée en A. La distance de A à la tige est notée $AO = a$.



1. Exprimer l'énergie potentielle totale $E_{\mathrm{p}}(x)$.
2. La courbe d'énergie potentielle est représentée ci-contre pour quatre valeurs de a : $a_1 = \ell_0/10, a_2 = \ell_0/3, a_3 = \ell_0$ et $a_4 = 3\ell_0$. En raisonnant qualitativement sur les positions d'équilibre, attribuer chaque courbe à la valeur de a qui lui correspond.
3. Pour chaque valeur de a, analyser en fonction des conditions initiales le mouvement possible de l'anneau.

10 Etude d'une particule chargée : cyclotron et spectromètre de masse

On considère un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Une particule chargée de charge q positive et de masse m pénètre avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ au point O de coordonnées $(0,0,0)$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$ perpendiculaire à $\vec{v}_0$ (Figure 5).

1. Montrer que la norme de la vitesse de la particule est constante.
2. Montrer que la trajectoire est plane.
3. On admet que la trajectoire est circulaire. Montrer que le rayon est égal à :

$$R = \frac{mv_0}{qB}$$

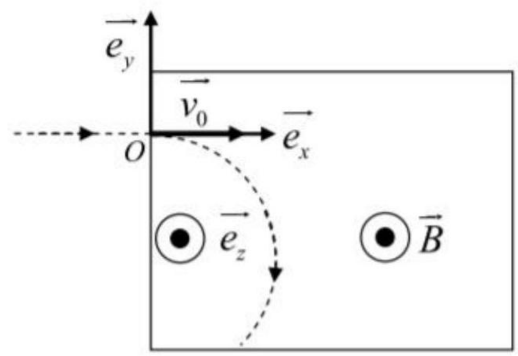


FIGURE 5 – Trajectoire d'une particule de charge q positive dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme.

Pour séparer les deux isotopes naturels de l'Uranium (l'uranium 238 et l'uranium 235), il avait été envisagé d'utiliser un spectrographe de masse. Cet appareil comporte trois parties, représentées en Figure 6, où règne un vide poussé.
Les atomes d'uranium sont ionisés dans une chambre d'ionisation en U^+(de charge électrique $q_{U^+} = e$) d'où ils sortent par la fente F_1 avec une vitesse négligeable.
Ces ions sont accélérés par un champ électrostatique uniforme imposé par une tension $W = V_{P_2} - V_{P_1}$ entre les plaques P_1 et P_2.
Enfin, les ions pénètrent dans une chambre de déviation où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}(B = 0,1\ \mathrm{T})$ perpendiculaire au plan de la figure. Ils décrivent alors deux trajectoires circulaires de rayons R_1 et R_2 et parviennent dans deux collecteurs C_1 et C_2.
Les masses de l'uranium 235 et de l'uranium 238 sont : $m_{U5} = 235$ u.m.a. et $m_{U8} = 238$ u.m.a.. Une unité de masse atomique (u.m.a.) vaut : 1 u.m.a $\simeq 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg.

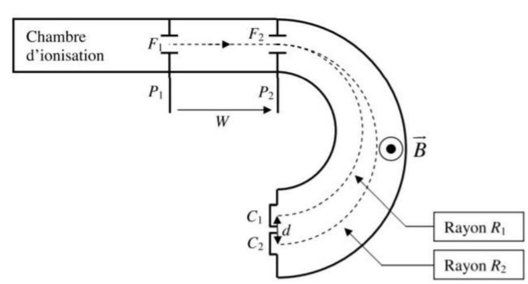


FIGURE 6 – Schéma de principe du spectrographe de masse.

4. Quel est le signe de la tension W ? Justifier.
5. Donner l'expression littérale de la vitesse v_{U8} de l'isotope ${}^{238}U^+$en F_2, en fonction de e, W et m_{U8}. Justifier votre réponse.
6. Calculer la valeur de la tension W pour que la distance entre les collecteurs C_1 et C_2 soit égale à $d = 2$ cm.

Le cyclotron est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux D_1 et D_2 dénommés dees et séparés par un intervalle étroit (Figure 7). Un champ magnétique uniforme $\vec{B}(B = 0,1\ \mathrm{T})$ règne à l'intérieur des dees, sa direction est parallèle à l'axe des demi-cylindres.

Un champ électrostatique variable E peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les dees en appliquant une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ qui atteint sa valeur maximale $U_m = 10^5\ \mathrm{V}$ lorsque le proton traverse cet espace.
Les protons, de masse $m_P = 1,67.10^{-27}\ \mathrm{kg}$ et de charge électrique $q_P = e$, sont injectés au centre du cyclotron avec une énergie cinétique négligeable. Dans chaque dee, ils décrivent des trajectoires demi-circulaires de rayon croissant. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est $R_S = 50\ \mathrm{cm}$.

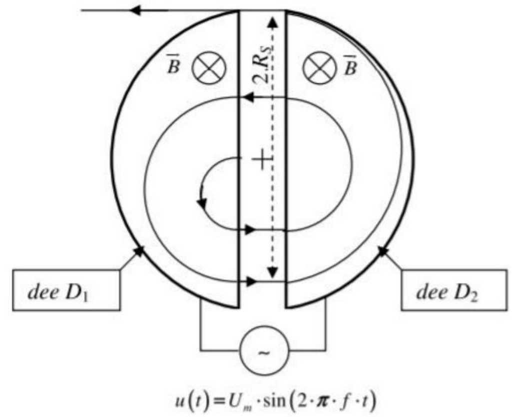


FIGURE 7 – Schéma de principe du cyclotron.

1. Donner l'expression littérale de la durée $T_{1/2}$ mise par un proton pour effectuer un demitour en fonction de m_P, e et B. Qu'en déduisez-vous ?
2. Justifier le choix d'une tension $u(t)$ alternative.
3. En déduire l'expression, puis la valeur de la fréquence f de la tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi f t)$ pour que les protons subissent une accélération maximale à chaque traversée. On négligera le temps de parcours d'un dee à l'autre.
4. Déterminer l'expression, puis la valeur de l'énergie cinétique E_{CS} des protons à la sortie du cyclotron.
5. Déterminer l'expression du nombre de tours N effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie en fonction de e, R_s, B, m_P et U_m. Effectuer l'application numérique.

Puissance rayonnée : pour une particule non relativiste, toute particule chargée de charge q et d'accélération a rayonne une puissance P_r, donnée par la formule de Larmor :

$$P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$$

On rappelle que c est la vitesse de la lumière dans le vide.

6. Montrer qu'une particule chargée de charge q, de vitesse v, qui décrit une trajectoire circulaire uniforme de rayon R, rayonne une puissance P_r de la forme : $P_r = \alpha v^4$. Exprimer le coefficient α en fonction de q, c, μ_0 et R.
7. Calculer l'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon $R_S = 50\ \mathrm{cm}$. Conclure

11 Un pilote d'aéroglisseur qui aime les bosses

Un pilote d'aéroglisseur s'amuse à prendre une bosse. La masse de l'ensemble est de $m = 200\ \mathrm{kg}$ et les hélices délivrent une puissance totale de $P = 2000\ \mathrm{W}$. On suppose que l'aéroglisseur ne subit aucun frottements (du sol ou de l'air) et que la totalité de la puissance délivrée par les hélices lui sert à avancer. La première partie de son mouvement est horizontal, les phases suivantes correspondent à une montée puis une descente comme représenté sur la figure 3 . On rappel que $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$.

11.1 Phase d'accélération

1. Rappeler le lien entre travail et puissance.
2. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.
3. Combien de temps sera nécessaire pour que l'aéroglisseur atteigne une vitesse de $v_A = 20\ \mathrm{m/s}$? Un résultat analytique en fonction des données du problème puis une application numérique sont attendus.

Le pilote coupe le moteur au début de la bosse en A (les hélices seront à l'arrêt à partir de ce point). La vitesse de l'aéroglisseur au début de la bosse en A est de v_A. Dans cette partie on étudie le mouvement de l'aéroglisseur sur la piste composée d'une portion rectiligne AB et inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, de rayon $R = 2m$ et d'angle $\widehat{BOC} = \pi/2 + \alpha$ (cf figure 8). L'orientation positive des angles sera prise dans le sens horaire.

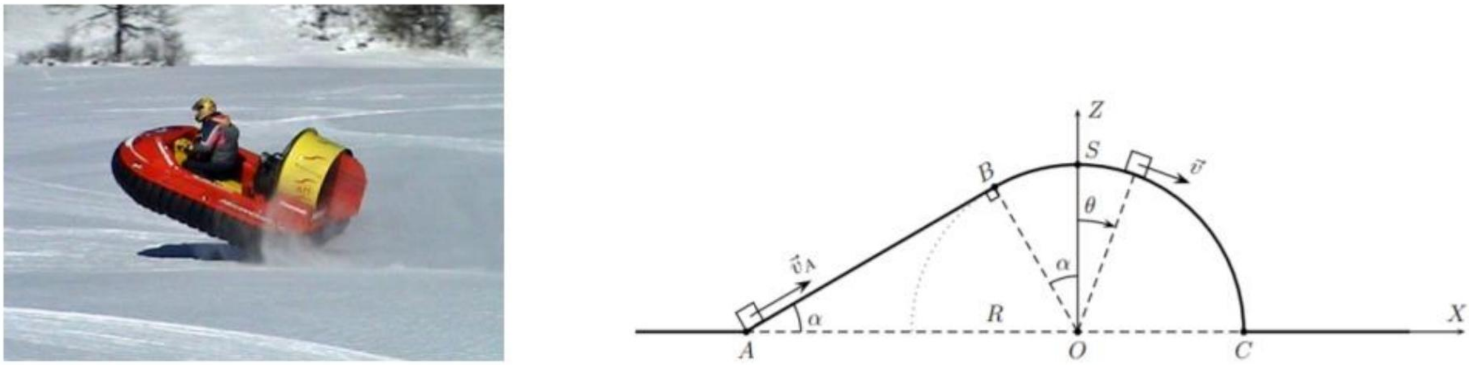


FIGURE 8 – Photo du pilote et de son aéroglisseur à gauche et schématisation de la piste parcourue par l'aéroglisseur à droite.

11.2 Portion rectiligne AB

4. Enoncer le théorème de l'énergie mécanique.
5. En déduire l'expression littérale de la vitesse v_B au point B en supposant que ce point est bien atteint.
6. Afin que B soit effectivement atteint par l'aéroglisseur, il est nécessaire que $v_A > v_{A,l}$. Déterminer l'expression littérale puis numérique de v_A

Pour les questions suivantes, on suppose la condition précédente vérifiée.

11.3 Portion circulaire BC

7. Enoncer le principe fondamental de la dynamique.
8. En déduire l'expression en fonction de $\theta, \dot{\theta}$ et des constantes m, g et R de la réaction normale $\vec{R}_N$ du support lors de la phase du mouvement sur l'arc BC.
9. Déterminer la relation liant v, θ et v_B. On pourra utiliser une méthode énergétique.
10. En déduire $\vec{R}_N$ en fonction des constantes, θ et v_A.
11. À quelle condition sur v_A (expression littérale puis numérique) n'y aura-t-il pas de décollage de M avant le sommet S ?
12. La condition précédente étant vérifiée, déterminer l'expression θ_D de θ pour laquelle l'aéroglisseur quitte la piste.
13. Déterminer l'expression de la vitesse pour $\theta = \theta_D$.

11.4 Atterrissage

On étudie maintenant le mouvement entre le moment où l'aéroglisseur a décollé et celui où il va toucher le sol. On se place dans le repère cartésien OXZ.

14. Écrire les conditions initiales en fonction de R, θ_D et v_D.
15. Déterminer l'abscisse de la position où l'aéroglisseur va entrer en collision avec le sol.

12 Un pendule qui tourne rond

On considère une bille (objet ponctuel) M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g \cdot \overrightarrow{e_x}$ (avec $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et $\overrightarrow{e_x}$ un vecteur unitaire de l'axe Ox). On considère que le référentiel terrestre est galiléen et on ne considère pas les mouvements en dehors du plan Oxy.
On repère M par l'angle orienté $\theta(t)$ entre la verticale et le fil : $\theta(t) = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_r})$ avec $\overrightarrow{e_r}$ colinéaire à $\overrightarrow{OM}$. On lâche la masse d'un angle θ_0 sans vitesse initiale.
Dans cette partie, on néglige les frottements.

1. Définir une base adaptée au problème (figure obligatoire) et donner la position $\overrightarrow{OM}$.
2. Déterminer l'expression de l'accélération de M dans la base choisie.

3. (a) Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\theta(t)$.
   (b) En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de l et g.
   (c) En déduire $\theta(t)$.
4. (a) Déterminer l'expression de T en fonction de $\theta, \dot{\theta}, m, g, l$ puis en fonction de θ, θ_0, m et g seulement.
   (b) Pour quel angle le fil risque-t-il le plus de casser ?

À l'instant $t = 0$, le point matériel est lancé de $M_0\,(\theta_0 = 0)$ avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$. On suppose que le fil reste tendu pour tout t. On pose $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

5. (a) Démontrer que la bille du pendule est un système conservatif.
   (b) Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m du pendule simple en fonction de θ et $\dot{\theta}$ en prenant une énergie potentielle de pesanteur $E_P(\theta)$ nulle au point M_0. Donner aussi l'expression de E_m en fonction de $\dot{\theta}_0$ en justifiant vos réponses.
   (c) Tracer l'allure de $E_P(\theta)$. Décrire les mouvements possibles du pendule à partir de M_0 suivant les valeurs de $\dot{\theta}_0$ en utilisant la courbe de $E_P(\theta)$. Pour quelles valeurs de $\dot{\theta}_0$ a-ton un mouvement borné ?