

Induction et conversion électromécanique - Correction

1 Loi de Lenz

En orientant le courant i de gauche à droite au niveau de l'ampèremètre :

- Cas 1 : $i < 0$
- Cas 2 : $i > 0$
- Cas 3 : $i < 0$
- Cas 4 : $i > 0$

2 Calcul de flux

Nous orientons le courant i dans la spire par convention dans le même sens que l'orientation de son contour, lui-même orienté d'après l'orientation de sa surface orientée \vec{S} choisie égale à $S\vec{e}_z$ (il est tout à fait possible de la choisir dans l'autre sens $-S\vec{e}_z$ cela changera simplement l'orientation du contour et donc de l'orientation du courant). Le choix de l'orientation du courant et de la force électromotrice est donc antihoraire dans la spire lorsque l'axe ($0z$) pointe vers nous d'après la règle de la main droite / tire-bouchon / tourne-vis.

- Cas 1 : $\phi = B_0 S = 1 \text{ T.cm}^2$ le flux est constant donc $e = 0$.
- Cas 2 : $\phi = AtS$, $e = -AS = -1 \text{ T.cm}^2.\text{s}^{-1} = -10^{-4} \text{ V}$.
- Cas 3 : $\phi = B_0 S \cos(\omega t)$, $e = -2\pi f B_0 S \cos(\omega t)$ avec $2\pi f B_0 S \simeq 30 \text{ mV}$.
- Cas 4 : $\phi = 0$, $e = 0$.

3 Mesure d'une inductance mutuelle 1

1. Un voltmètre idéal ne laisse pas passer de courant dans la deuxième bobine.
La résistance d'un voltmètre réel est suffisamment grande pour dire que le courant circulant dans le deuxième circuit est très faible devant le courant circulant dans le premier : les phénomènes d'induction du deuxième circuit sur le premier sont négligeables.
2. À la place de la bobine 1 : $e_1 = -L \frac{di}{dt}$. À la place de la bobine 2 : $e_2 = -M \frac{di}{dt}$. Toujours un problème de sens de la bobine dans ce type d'exercice : par défaut, placer e_1 et e_2 dans le même sens (vers le bas).
3. Dans quel sens? Norme du flux = $M||i||$.
4. $u_2 = M \frac{di}{dt}$
5. $u_2 = \frac{M}{R} \frac{du_1}{dt}$
6. $U_2 = \frac{M}{R} \omega U_1$ soit $M = \frac{RU_2}{\omega U_1}$
7. $M = 1 \text{ mH}$

4 Auto-induction et inductance mutuelle

5 Transformateur

6 Spire en rotation

Notons \vec{n} le vecteur normal à la spire, défini tel que $\theta = \pi/2$ lorsque \vec{n} et \vec{B} sont colinéaires et de même sens. Le sens positif de la spire est alors défini à partir de ce vecteur \vec{n} . On choisit l'origine du temps $t = 0$ lorsque $\theta = 0$: la loi horaire $\theta(t)$ s'écrit donc tout simplement $\theta = \Omega t$

1. Comme le champ magnétique est uniforme à l'échelle de la spire, on en déduit son flux au travers de la spire

$$\phi(t) = S\vec{B} \cdot \vec{n} = SB \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = SB \sin\theta = SB \sin\Omega t$$

La f.é.m. induite dans la spire e se déduit de la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\Omega SB \cos\Omega t \quad \text{soit} \quad e(t) = -\Omega SB \cos\Omega t$$

Le signe de la f.é.m dépend du temps car le vecteur normal \vec{n} est d'orientation fixée, donc le flux change de signe.

Le courant induit dans la spire, orienté dans le sens de e , vaut simplement

$$i = \frac{e}{r} \quad \text{d'où} \quad i(t) = -\frac{\Omega SB}{r} \cos\Omega t$$

2. Le moment magnétique instantané de la spire vaut

$$\vec{m}(t) = i(t)S\vec{n} \quad \text{soit} \quad \vec{m}(t) = -\frac{\Omega S^2 B}{r} \cos\Omega t \vec{n}$$

3. Le couple de Laplace qui s'exerce sur la spire est

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} = \left[-\frac{\Omega S^2 B}{r} \cos\Omega t \times B \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right] \vec{e}_\Delta = -\frac{\Omega S^2 B^2}{r} \cos\Omega t \cos(\theta) \vec{e}_\Delta$$

ce qui donne finalement

$$\vec{\Gamma}(t) = -\frac{\Omega S^2 B^2}{r} \cos^2\Omega t \vec{e}_\Delta \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Gamma} \rangle = -\frac{\Omega S^2 B^2}{2r} \vec{e}_\Delta$$

La composante sur Δ de ce couple est toujours négative, c'est-à-dire qu'il tend à freiner la spire dans son mouvement (dans le sens positif) autour de Δ . Ce résultat aurait pu se prévoir car ce couple résulte de phénomènes d'induction, générés par le mouvement de la spire autour de l'axe. On sait donc d'après la loi de modération de Lenz qu'il a pour effet de s'opposer à ce mouvement, et donc de vouloir freiner la spire.

7 Principe d'un alternateur

1. La spire est en mouvement dans un champ magnétique stationnaire, alors il apparaît une f.e.m. induite et donc un courant induit. Ce courant entraîne l'apparition d'un couple de Laplace sur la spire qui tend à s'opposer à la rotation de la spire.
2. D'après la loi de Faraday $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\pi a^2 \cos(\omega t))$. De plus, d'après la loi des mailles et la loi d'ohm on a $e = Ri$ donc $i = \frac{B\pi a^2 \omega}{R} \sin(\omega t)$.
3. $\Gamma_{\text{Lapl}} = \vec{m} \wedge \vec{B} = i\vec{S} \wedge \vec{B} = \frac{B^2 \pi^2 a^4 \omega}{R} \sin(\omega t) \times (-\sin(\omega t)\vec{u}_z)$.
4. Le TMC appliqué à un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe s'écrit

$$J\dot{\omega} = \Gamma_{\text{Lapl}} + \Gamma_m$$

avec Γ_m le couple moteur entraînant la spire. En régime stationnaire on obtient $\Gamma_{\text{Lapl}} = -\Gamma_m$.

5. $P_J = Ri^2 = \frac{B^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{R} \sin^2(\omega t)$ et $P_L = \Gamma_{\text{Lapl}} \omega = -\frac{B^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{R} \sin^2(\omega t)$. L'énergie mécanique est intégralement convertie en énergie électrique $P_J + P_L = 0$.

8 Principe de fonctionnement d'un générateur synchrone

1. Comme la distance entre la spire et l'aimant est bien plus grande que le rayon de la spire, on peut considérer le champ magnétique généré par l'aimant uniforme et vaut

$$\vec{B}_a(\theta) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi x^3} (2 \cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta)$$

en étant très vigilant à la définition de l'angle θ servant à repérer la position de la spire, voir figure 1 .

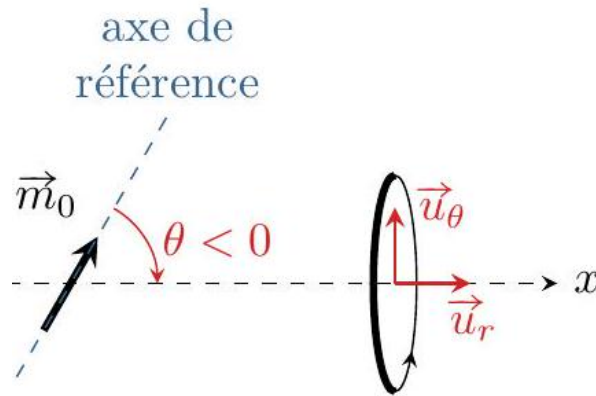


FIGURE 1 – Orientation relative de la spire par rapport à l'aimant. Comme dans l'expression du champ magnétique donné par l'énoncé, les coordonnées utilisées sont les coordonnées polaires de centre O et d'axe l'axe de l'aimant.

Compte tenu de l'orientation de la spire, spécifiée sur le schéma, le flux du champ magnétique au travers de la spire vaut

$$\phi = S \vec{B}_a \cdot \vec{u}_r = \pi a^2 \times \frac{\mu_0 m_0}{4\pi x^3} \times 2 \cos \theta = \frac{\mu_0 m_0 a^2}{2x^3} \cos \theta$$

et on en déduit la force électromotrice induite dans la spire

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 m_0 a^2}{2x^3} (-\dot{\theta} \sin \theta)$$

Si l'aimant tourne à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe z , alors compte tenu du schéma on a $\theta = -\omega t$ (en supposant $\theta = 0$ à $t = 0$, donc $\dot{\theta} = -\omega$, et alors

$$e = +\frac{\mu_0 m_0 a^2}{2x^3} \omega \sin \omega t$$

Faites très attention aux multiples signes et compensations de signe ! Et vérifiez qualitativement le signe final : pour $t = 0$ l'aimant est dans l'axe de la spire, donc à $t \gtrsim 0$ il s'en éloigne, donc le flux au travers de la spire diminue, donc d'après la loi de Faraday $e > 0$. Ouf, c'est ce qu'on vient de trouver.

Le courant induit se détermine alors directement à partir de la loi d'Ohm, $i = e/R$, d'où

$$i = \frac{\mu_0 m_0 a^2 \omega}{2x^3 R} \sin \omega t$$

La spire étant simplement résistive, elle ne peut stocker d'énergie, et toute la puissance qu'elle reçoit est dissipée par effet Joule. Ainsi, la puissance électrique reçue par la spire $\mathcal{P}_e = Ri^2$ vaut

$$\mathcal{P}_e = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 m_0 a^2 \omega}{2x^3} \right)^2 \sin^2 \omega t$$

2. Le champ créé par l'aimant n'exerce pas de couple sur l'aimant lui-même. On en déduit que le champ à l'origine de ce couple est donc le champ magnétique induit par la spire. L'énoncé donne le champ créé par un moment magnétique : il faut donc calculer le moment magnétique de la spire pour en déduire le champ qu'elle crée, en étant particulièrement vigilant au repérage. Compte tenu de l'orientation du courant sur la figure 9, le moment magnétique de la spire vaut

$$\vec{m}_{\text{sp}} = i \pi a^2 \vec{u}_x = \frac{\pi \mu_0 m_0 a^4 \omega}{2x^3 R} \sin \omega t \vec{u}_x$$

En coordonnées polaires d'axe \vec{u}_x et d'origine le centre de la spire (et donc pas O !), l'aimant a pour coordonnées $r = x$ et $\theta = \pi$, si bien que $\vec{u}_r = -\vec{u}_x$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_y$. On en déduit que le champ magnétique créé en O au niveau de l'aimant par la spire vaut

$$\vec{B}_{\text{sp}}(O) = \frac{\mu_0 m_{\text{sp}}}{4\pi x^3} [2 \cos \pi (-\vec{u}_x) + \sin \pi (-\vec{u}_y)]$$

soit

et ainsi

$$\vec{B}_{\text{sp}}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi x^3} \times \frac{\pi \mu_0 m_0 a^4 \omega}{2x^3 R} \sin \omega t \times 2\vec{u}_x$$

$$\vec{B}_{\text{sp}}(O) = \frac{\mu_0^2 m_0 a^4 \omega}{4x^6 R} \sin \omega t \vec{u}_x$$

Encore une fois, pensez à vérifier qualitativement les signes ! En connaissant le sens du courant induit d'après la question précédente ($i > 0$ pour $t \gtrsim 0$), on déduit de la règle de la main droite que \vec{B}_{sp} doit être porté par $+\vec{u}_x$. Compte tenu du fait que les calculs ne sont pas très sympathiques, ces vérifications qualitatives font vraiment partie des compétences testées à l'oral du concours.

Finalement, le couple magnétique exercé par la spire sur l'aimant vaut

$$\vec{\Gamma} = \vec{m}_0 \wedge \vec{B}_{\text{sp}}(O)$$

Le plus sûr pour calculer le produit vectoriel est de décomposer les coordonnées de \vec{m}_0 sur la base \vec{u}_x, \vec{u}_y . Comme l'aimant tourne à vitesse angulaire ω (supposée) positive autour de \vec{u}_z , alors

$$\vec{\Gamma} = m_0 [\cos(\omega t)\vec{u}_x + \sin(\omega t)\vec{u}_y] \wedge \frac{\mu_0^2 m_0 a^4 \omega}{4x^6 R} \sin \omega t \vec{u}_x$$

ce qui conduit à

$$\vec{\Gamma} = -\frac{\mu_0^2 m_0^2 a^4 \omega}{4x^6 R} \sin^2 \omega t \vec{u}_z$$

On vérifie encore et toujours le signe : le couple est porté par $-\vec{u}_z$, c'est-à-dire qu'il résiste au mouvement de l'aimant. D'après la loi de Lenz, c'est complètement normal, puisque ce couple est d'origine inductive ... et que la cause de ce phénomène d'induction est le mouvement de l'aimant.

3. Pour maintenir la vitesse de rotation de l'aimant constante, le système mécanique doit fournir à l'aimant sous forme d'un couple une puissance exactement opposée à la puissance dissipée par $\vec{\Gamma}$. La puissance mécanique à fournir vaut donc $\mathcal{P}_m = -\Gamma\omega$, d'où

$$\mathcal{P}_m = \frac{\mu_0^2 m_0^2 a^4 \omega^2}{4x^6 R} \sin^2 \omega t$$

On remarque qu'on a $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_e$, c'est-à-dire que toute la puissance mécanique fournie à l'aimant est transmise à la spire sous forme de puissance électrique : on a bien modélisé un générateur électrique simplifié.

9 Mesure d'une inductance mutuelle 2

1. Comme l'oscilloscope est idéal, tout se passe comme si la bobine 2 était en circuit ouvert, le courant la traversant est donc nul : $\forall t, i_2(t) = 0$. D'après la loi de comportement, on aurait

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad \dots \text{ ce qui est faux !}$$

La loi de comportement de la bobine n'est pas applicable ici car elle est établie en ne tenant compte que de l'autoinduction, cf. cours, alors qu'ici il faut également prendre en compte l'induction mutuelle entre les deux bobines L_1 et L_2

2. On peut raisonner ou bien sur le schéma de l'énoncé en se méfiant de la tension aux bornes de la bobine, ou bien sur le schéma électrique équivalent de la figure 2, qui fait directement apparaître des générateurs induits qui traduisent à la fois l'induction propre et mutuelle. En tout cas, il vaut mieux éviter de mélanger les deux.

En vertu de la loi de Faraday et comme $i_2 = 0$, le double effet de l'auto-induction et de l'induction mutuelle est représenté par les générateurs de f.é.m.

$$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}$$

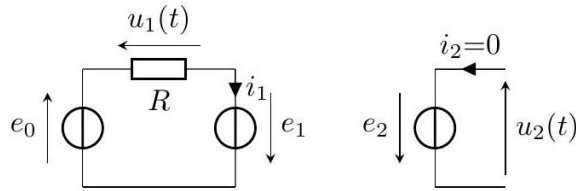


FIGURE 2 – Schéma électrique équivalent au dispositif de mesure d'inductance mutuelle.

Par application de la loi des mailles au circuit 2 ,

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} \quad \text{d'où} \quad u_2 = \frac{M}{R} \frac{du_1}{dt}$$

3. Traduisons la relation précédente en représentation complexe :

$$\underline{U}_2 = j\omega \frac{M}{R} \underline{U}_1$$

Comme $U_{1,2} = |\underline{U}_{1,2}|$ alors

$$U_2 = \omega \frac{M}{R} U_1 \quad \text{d'où} \quad M = \frac{RU_2}{2\pi f U_1} = 1,3\text{mH}$$

4. Lorsque la bobine 2 est tournée de 180° , elle retrouve exactement la configuration géométrique de départ excepté le sens de branchement des fils, qui est inversé : on mesure alors $u'_2 = -u_2$, et le même calcul que précédemment montre que la valeur de M est inchangée.

En toute rigueur, M change de signe, mais le signe d'une inductance mutuelle dépend des orientations des courants, donc de conventions, et n'a donc pas vraiment de pertinence physique.

Lorsque la bobine est tournée de 90° , beaucoup moins de lignes du champ magnétique créé par la bobine 1 peuvent traverser la bobine 2 , si bien que le flux $\phi_{1 \rightarrow 2}$ est nettement diminué à courant i_1 fixé, ce qui veut dire que M est plus faible.

Au contraire, si la bobine 2 est placée sur le même axe que la bobine 1 alors davantage de lignes de champ issues de la bobine 1 traversent la bobine 2 , donc le flux $\phi_{1 \rightarrow 2}$ est plus élevé à courant i_1 fixé, donc M est plus grande.

10 Plaque à induction 1

1. Attention ! Dès lors qu'il y a auto-induction (et champ extérieur de façon générale), la loi de comportement habituelle de la bobine ne s'applique plus. La tension à ses bornes se détermine à partir de la loi de Faraday.

Un schéma de principe et un schéma électrique équivalent faisant apparaître des générateurs induits sont représentés figure 3. On peut raisonner indifféremment sur l'un ou sur l'autre, à condition de se méfier de la loi de comportement de la bobine si on choisit le schéma de gauche, et de ne pas oublier l'auto-induction si on choisit le schéma de droite.

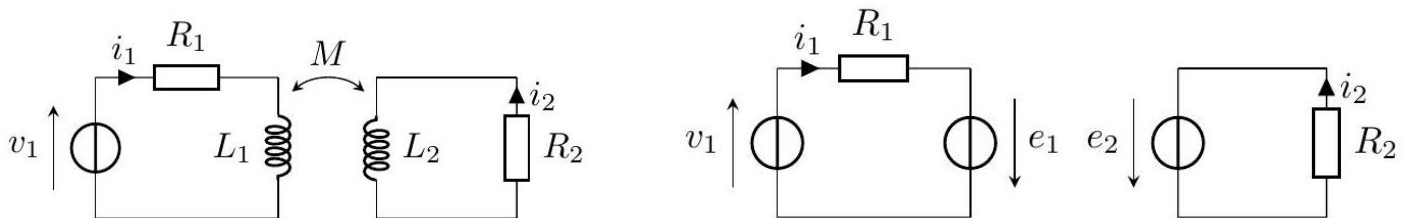


FIGURE 3 – Schéma de principe à gauche et avec générateurs induits à droite, équivalents à une plaque à induction. Il est possible de raisonner directement sur le schéma de principe ... mais attention à la loi de comportement de la bobine. Une autre représentation possible fait intervenir directement des générateurs induits ... mais attention à ne pas oublier l'auto-induction.

Les deux générateurs de f.é.m. e_1 et e_2 orientées dans le même sens que les courants traduisent l'effet de l'induction dans les circuits. Par définition, on a

$$\phi_{\rightarrow 1} = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{d'où} \quad e_1 = -\frac{d\phi_{\rightarrow 1}}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

et de même

$$\phi_{\rightarrow 2} = L_2 i_2 + M i_1 \quad \text{d'où} \quad e_2 = -\frac{d\phi_{\rightarrow 2}}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

Par application de la loi des mailles, on en déduit

$$v_1 + e_1 = R_1 i_1 \quad \text{et} \quad e_2 = R_2 i_2$$

soit

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

2. Traduisons l'équation de fonctionnement de l'induit (circuit 2) en complexes,

$$0 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1$$

ce qui conduit à

$$\underline{H} = -\frac{jM\omega}{R_2 + j\omega L_2}$$

3. D'après l'équation de fonctionnement de l'inducteur,

$$\underline{V}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \quad \text{d'où} \quad \underline{Z}_e = R_1 + j\omega L_1 + jM\omega \underline{H} \quad \text{soit} \quad \underline{Z} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + j\omega L_2}.$$

4. Dans l'hypothèse très haute fréquence, les expressions se simplifient en

$$\underline{H} = -\frac{M}{L_2} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_e = jL_1\omega \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right)$$

Numériquement,

$$\left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right| = 8,3 \quad \text{et} \quad |\underline{Z}_e| = 2,1\Omega$$

On remarque que la qualité du couplage inductif apparaît dans l'expression de \underline{Z}_e : si le couplage est parfait, $M = \sqrt{L_1 L_2}$, alors l'impédance d'entrée du système est nulle, signe d'une transmission parfaite de l'énergie électromagnétique. On retrouve exactement le même résultat à propos du transformateur.

Remarquons aussi que la différence de nombre de spires dans l'inducteur et l'induit permet au courant à l'induit d'être nettement supérieur au courant à l'inducteur, et donc de fournir davantage d'effet Joule dans le fond de la casserole.

5. Qualitativement, si l'on éloigne la casserole le couplage sera moins bon (M diminue) et donc l'impédance d'entrée augmente. Plus précisément, comme la casserole est éloignée de l'inducteur qui est source de champ magnétique, le flux vu par l'induit diminue combien même le courant dans l'inducteur serait imposé, ce qui indique que M diminue. Si l'impédance d'entrée augmente alors que la tension d'alimentation v_1 ne change pas, alors la définition de \underline{Z}_e montre que l'inducteur appelle moins de courant.

11 Plaque à induction 2

12 Peut-on négliger l'auto-induction ?

1. Compte tenu du sens de i sur le schéma, le vecteur normal orienté est le vecteur $+\vec{n}$. Ainsi,

$$\phi_{\text{ext}} = S \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{n} = S B_0 \cos(\omega t)$$

Sur le schéma électrique, figure 4, la f.é.m. induite e_{ext} est orientée dans le même sens que l'intensité et vaut

$$e_{\text{ext}} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} = +S B_0 \omega \sin(\omega t)$$

d'où on déduit l'intensité induite par le champ extérieur $i_{\text{ext}} = e_{\text{ext}}/R$ de la loi d'Ohm,

$$i_{\text{ext}} = \frac{SB_0\omega}{R} \sin(\omega t)$$

2. En tenant compte de l'auto-induction,

$$\phi = \phi_{\text{ext}} + Li \quad \text{donc} \quad \phi = SB_0 \cos(\omega t) + Li.$$



FIGURE 4 – Schémas électriques équivalents sans auto-induction à gauche et avec à droite.

Il n'est pas possible de remplacer i par l'expression obtenue à la question précédente : cette expression est valable lorsque seul le champ extérieur est pris en compte, alors qu'on s'intéresse désormais en plus à l'auto-induction.

Le schéma électrique équivalent est représenté figure 4. La f.é.m. induite tient compte des deux contributions au flux et vaut

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = SB_0\omega \sin(\omega t) - L\frac{di}{dt}$$

D'après la loi des mailles, $e = Ri$, d'où on déduit

$$L\frac{di}{dt} + Ri = SB_0\omega \sin(\omega t)$$

3. À partir des raisonnements précédents, on identifie

$$e_{\text{ext}} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} \quad \text{donc} \quad \underline{E}_{\text{ext}} = j\omega SB_0$$

et de même

$$e_L = -L\frac{di}{dt} \quad \text{donc} \quad \underline{E}_L = -j\omega L\underline{I}$$

d'où on trouve

$$\underline{H} = \frac{-j\omega L\underline{I}}{j\omega SB_0} = \frac{L}{SB_0}\underline{I}$$

Or d'après l'équation différentielle obtenue à la question précédente,

$$j\omega L\underline{I} + R\underline{I} = j\omega SB_0 \quad \text{soit} \quad \underline{I} = \frac{j\omega SB_0}{R + jL\omega}.$$

L'expression finale est donc

$$\underline{H} = \frac{L}{SB_0} \frac{j\omega SB_0}{R + jL\omega} \quad \text{d'où} \quad |\underline{H}| = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}}.$$

La force électromotrice auto-induite dès lors que $|\underline{H}| \ll 1$, c'est-à-dire lorsque $R/L\omega \gg 1$ soit

$$\omega \ll \frac{R}{L}$$

Pour reprendre des termes plus familiers en électrocinétique, on vient d'établir que la f.é.m. auto-induite de la bobine était négligeable en régime très basse fréquence : son comportement « bobine » n'apparaît pas en régime permanent, elle est bien équivalente à un fil.

4. Pour $L = 100\text{mH}$ et $R = 1\text{k}\Omega$, l'auto-induction est négligeable dans la limite

$$\omega \ll 1 \cdot 10^4 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad f \ll 1,6 \text{kHz}$$

5. Considérons par exemple $d \sim 1 \text{mm}$ et $D \sim 1 \text{m}$. On trouve alors $L \sim 4 \cdot 10^{-6} \text{H}$, ce qui donne comme condition

$$\omega \ll 2 \cdot 10^9 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad f \ll 3 \cdot 10^8 \text{Hz}$$

Pour toutes les fréquences usuelles en électronique, limitées au plus à $1 \cdot 10^7 \text{Hz}$, négliger l'auto-induction du circuit est donc légitime.

13 Solénoïdes imbriqués

1. Par hypothèse, $L \gg r_1$ et r_2 , ce qui justifie d'approximer les solénoïdes comme infinis. En notant i_1 et i_2 les courants qui y circulent et compte tenu de l'orientation des spires, le champ qu'ils créent en leur intérieur vaut

$$\vec{B}_{1,2} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_{1,2} \vec{e}_z$$

Inductance propre L_1 :

▷ Flux créé par \mathcal{S}_1 au travers d'une spire s_1 de \mathcal{S}_1 :

$$\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_1(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_1$$

▷ Flux total créé par \mathcal{S}_1 au travers de lui-même :

$$\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = N \phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_1$$

▷ Inductance propre : par définition, $\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = L_1 i_1$ donc

$$L_1 = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}$$

Inductance propre L_2 : par la même démarche,

$$L_2 = \pi r_2^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}$$

Inductance mutuelle M : comme le champ créé par \mathcal{S}_2 est uniforme à l'intérieur de \mathcal{S}_1 alors que la réciproque n'est pas vraie, il est plus simple de calculer M à partir du flux créé par \mathcal{S}_2 au travers de \mathcal{S}_1 .

▷ Flux créé par \mathcal{S}_2 au travers d'une spire s_1 de \mathcal{S}_1 :

$$\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_2(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_2$$

▷ Flux total créé par \mathcal{S}_2 au travers de \mathcal{S}_1 :

$$\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = N \phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_2$$

▷ Inductance mutuelle : par définition, $\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = M i_2$ donc

$$M = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}$$

2. Le circuit équivalent est tracé figure 5. Le circuit 1 contient une bobine et un générateur de courant imposant le courant i_1 , le circuit 2 ne contient qu'une bobine court-circuitée. Il y a un couplage inductif entre les deux circuits. Compte tenu de la convention récepteur,

$$u_1 = +L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = +L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

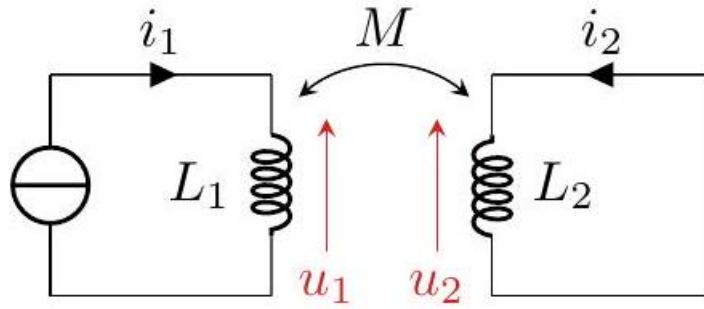


FIGURE 5 – Circuit électrique équivalent.

D'après la loi des mailles, $u_2 = 0$ donc

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L} \frac{di_1}{dt}$$

et par intégration

$$i_2 = -\frac{M}{L} i_1 + \text{cte} .$$

Comme le solénoïde S_2 n'est pas relié à un générateur, on peut supposer qu'il n'y a pas de courant continu qui serait physiquement impossible à cause des résistances des fils, même si elles sont faibles. Finalement,

$$i_2(t) = -\frac{M}{L} I \cos(\omega t)$$

d'amplitude

$$I_2 = \frac{M}{L} I$$

3. D'après le principe de superposition, en un point M se trouvant à l'intérieur des deux solénoïdes,

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} (i_1 + i_2) \vec{e}_z$$

d'où en remplaçant

$$\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} \left(1 - \frac{M}{L}\right) I \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

14 Haut-Parleur simplifié

1. Le champ magnétique est uniforme à l'échelle du circuit. Les variations de flux proviennent de la variation de surface du circuit, dû au mouvement de la tige mobile. Notons S_0 l'aire entourée par le circuit lorsque $x = 0$. On a alors

$$S(t) = S_0 + ax$$

Compte tenu du sens du courant dans le circuit indiqué sur le schéma de l'énoncé, le vecteur normal est égal à $+\vec{e}_z$. Ainsi,

$$\phi(t) = S(t) \vec{B} \cdot \vec{n} = (S_0 + ax) B$$

et d'après la loi de Faraday

$$e = -aB\dot{x}$$

2. Pour établir l'équation mécanique, appliquons la loi de la quantité de mouvement à l'ensemble tige et membrane, dans le référentiel terrestre. Les actions mécaniques qu'il subit sont
- ▷ son poids \vec{P} , vertical
 - ▷ la réaction normale du rail \vec{N} , verticale aussi en négligeant les frottements solides, et dont on sait qu'elle compense le poids car le mouvement est selon \vec{e}_x seulement ;
 - ▷ la force de frottements $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x$ de l'air sur la membrane ;
 - ▷ la force de Laplace exercée sur la tige, qui vaut

$$\vec{F}_L = i\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{B} = iaB (\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z) = iaB\vec{e}_x$$

- ▷ la force de rappel exercée par le ressort sur la tige,

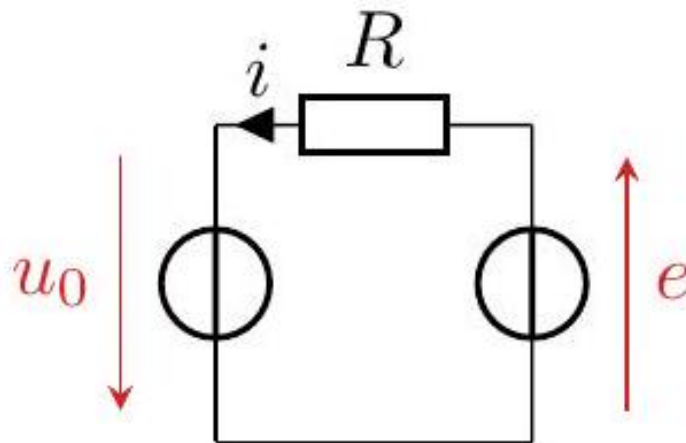
$$\vec{F}_r = -k[(\ell_0 + x) - \ell_0]\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x$$

La loi de la quantité de mouvement donne alors

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f} + \vec{F}_L + \vec{F}_r$$

d'où on déduit en projetant sur \vec{e}_x

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx + iaB$$



Écrivons maintenant l'équation électrique en se basant sur un schéma électrique équivalent. Les effets à prendre en compte sont la tension de commande u_0 , la résistance R du circuit, et la f.é.m. d'induction e . D'après la loi des mailles,

$$u_0 + e = Ri \quad \text{soit} \quad u_0 - aB\dot{x} = Ri$$

3. On cherche une équation sur x : il faut donc remplacer i dans l'équation mécanique en utilisant l'équation électrique. D'après cette équation,

$$i = \frac{u_0}{R} - \frac{aB}{R}\dot{x}$$

ce qui donne en remplaçant

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx + \frac{aBu_0}{R} - \frac{(aB)^2}{R}\dot{x}$$

C'est une équation d'oscillateur harmonique amorti, que l'on peut écrire sous forme canonique

$$\ddot{x} + \frac{1}{m} \left(\alpha + \frac{(aB)^2}{R} \right) \dot{x} + kx = \frac{aBu_0}{R}.$$

Lorsque l'on remplace i dans l'expression de la force de Laplace, on voit que celle-ci compte deux contributeurs : un terme de forçage constant, qui change la position d'équilibre de la tige, et un terme analogue à une force de frottement fluide, proportionnelle à \dot{x} . Le fait de trouver un terme de frottement (donc avec un signe -) est cohérent avec la loi de Lenz : l'induction a pour conséquence un freinage qui s'oppose au mouvement de la tige, source de l'induction.

4. Pour obtenir le bilan de puissance, on multiplie l'équation mécanique par \dot{x} et l'équation électrique par i , ce qui donne

$$m\dot{x}\ddot{x} = -\alpha\dot{x}^2 - kx\dot{x} + iaB\dot{x} \quad \text{et} \quad u_0i - aB\dot{x}i = Ri^2$$

L'équation mécanique donne

$$iaB\dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) + \alpha\dot{x}^2$$

ce qui se substitue dans l'équation électrique sous la forme

$$u_0i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) + \alpha\dot{x}^2 + Ri^2$$

Le membre de gauche traduit la puissance électrique fournie par le générateur. Cette puissance est utilisée pour modifier l'énergie mécanique de la partie mobile (tige et membrane), ce qu'indique le terme dans la dérivée. Une partie est «perdue» par frottements fluides, ce qui traduit l'émission de l'onde sonore. Enfin, le reste de cette puissance est dissipée sous forme d'effet Joule, décrit par le dernier terme du bilan de puissance.

15 Haut-Parleur

1. Le système est soumis à son poids compensé par la tension de la suspension, la force de rappel élastique ; le frottement de type visqueux et la force de Laplace. Ainsi le PFD projeté sur la direction horizontale s'écrit

$$m\ddot{x} = \overrightarrow{F}_L \overrightarrow{u}_x - kx - f\dot{x}$$

Déterminons l'expression de la force de Laplace sur le solénoïde. Ce dernier peut être décrit comme un empilement de spire, calculons donc la force de Laplace sur une spire.

Soit une spire d'axe \overrightarrow{u}_x . Il ne s'agit pas d'un circuit filiforme, il est nécessaire de calculer la force de Laplace élémentaire. Un élément de longueur de spire s'écrit $d\vec{l} = r d\theta \overrightarrow{u}_\theta$ avec r le rayon de la spire, $d\theta$ un angle infinitésimal et $\overrightarrow{u}_\theta$ le vecteur orthoradial du repère cylindrique naturellement associé à la spire. De plus, de par la conception du dispositif le champ magnétique est radial à la spire en tout point. Alors,

$$d\overrightarrow{F}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = iBr d\theta (-\overrightarrow{u}_x)$$

Alors, la force de Laplace s'appliquant sur la totalité de la spire s'écrit

$$\overrightarrow{F}_{L,spire} = \int_0^{2\pi} d\overrightarrow{F}_L = -iB(2\pi r)\overrightarrow{u}_x.$$

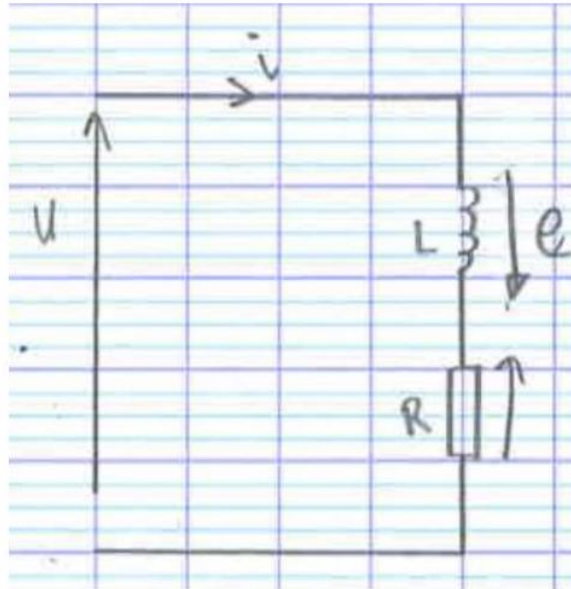
Le solénoïde étant composé de plusieurs spire, la force de Laplace qu'il subit s'écrit comme la somme de la force de Laplace subie par chaque spire

$$\overrightarrow{F}_L = N\overrightarrow{F}_{L,spire} = -iB(N2\pi r)\overrightarrow{u}_x = -iBl\overrightarrow{u}_x$$

avec $l = N2\pi r$ la longueur totale du fil ayant servi à fabriquer le solénoïde. Ainsi, le PFD devient

$$m\ddot{x} = -ilB - kx - f\dot{x}$$

2. Le schéma électrique équivalent au circuit est



avec u la tension imposée au circuit, e la f.e.m. induite par induction et i le courant circulant dans le circuit.

Le flux totale à travers le rail de Laplace s'écrit $\Phi = Li - Blx$ et donc la f.e.m. induite dans un rail de Laplace s'écrit $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} + Bl\dot{x}$. La loi des mailles permet d'écrire l'équation électrique du dispositif comme

$$u = Ri - e = Ri + L\frac{di}{dt} - Bl\dot{x}.$$

3. Multiplions l'équation électrique par le courant,

$$ui = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) - \dot{x}Bli$$

qui devient, en réinjectant l'équation mécanique

$$ui = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + f\dot{x}^2$$

avec dans l'ordre, la puissance fournie au système par le générateur, la puissance dissipée par effet Joule, la puissance stockée sous forme magnétique dans le solénoïde, la puissance stockée dans la membrane sous forme élastique, la puissance associée à l'énergie cinétique du système et une puissance dissipée par frottement. C'est ce dernier terme qui traduit la transmission d'énergie au milieu de propagation et donc l'existence d'un son.

$$4. \langle ui \rangle = \frac{1}{2}\Re\langle \frac{1}{2}Lj\omega i^* \rangle + \frac{1}{2}\Re\langle \frac{1}{2}m j\omega v v^* \rangle + \frac{1}{2}\Re\langle \frac{1}{2}k j\omega x x^* \rangle + f\langle \dot{x}^2 \rangle + R\langle i^2 \rangle = f\langle \dot{x}^2 \rangle + R\langle i^2 \rangle.$$

$$5. \eta = \frac{f\langle \dot{x}^2 \rangle}{\langle ui \rangle} = \frac{f\langle \dot{x}^2 \rangle}{f\langle \dot{x}^2 \rangle + R\langle i^2 \rangle}.$$

16 Moteur synchrone 1

Les notations utilisées dans tout l'exercice sont présentées figure 6 .

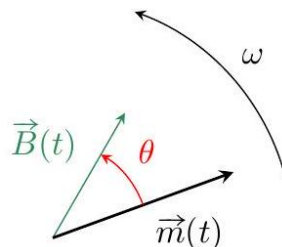


FIGURE 6 – Notations pour l'étude du moteur synchrone.

1. On peut utiliser deux bobines dont les axes forment un angle de $\pi/2$ et alimentées par des courants déphasés d'autant. Cependant, EDF fournit du courant triphasé, c'est-à-dire trois sorties (les phases) déphasées de $2\pi/3$ les unes par rapport aux autres. La solution technologique la plus simple consiste donc à utiliser trois bobines dont les axes se coupent en un même point et inclinées de $2\pi/3$ les unes par rapport aux autres, comme indiqué sur la figure 7.

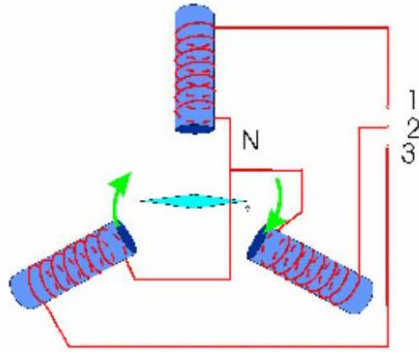


FIGURE 7 – Champ tournant généré par trois bobines. Chacune des bobines est reliée à une phase de l'alimentation de secteur et au neutre, qui joue le rôle de masse.

2. Appliquons le théorème du moment cinétique au rotor dans le référentiel du stator. Lorsque le moteur tourne à vide, il n'est soumis qu'au couple magnétique $\vec{\mathcal{M}}$. D'après la loi du moment cinétique,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

mais comme on s'intéresse au régime permanent,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{m} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

On en déduit que \vec{m} et \vec{B} sont colinéaires, c'est-à-dire $\theta = 0$.

3. Toujours en régime permanent, le couple moteur et le moment résistant se compensent vectoriellement,

$$\vec{m} \wedge \vec{B} + \vec{\mathcal{M}}_r = \vec{0}$$

donc en norme

$$mB \sin \theta = \mathcal{M}_r \quad \text{soit} \quad \theta = \arcsin \frac{\mathcal{M}_r}{mB} = 24^\circ$$

L'angle θ est bien positif, d'une part car il est défini de \vec{m} vers \vec{B} , et d'autre part car le couple résistant a forcément pour effet de retarder le rotor par rapport au champ. De façon générale, lorsque le moteur entraîne une charge, le moment magnétique suit le champ mais avec un angle interne d'autant plus grand que le couple résistant est important. La puissance fournie par le moteur vaut

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_r \omega \quad \text{donc} \quad \mathcal{P} = mB\omega \sin \theta = 205 \text{ W}$$

Cette puissance provient du générateur électrique qui alimente les bobines produisant le champ tournant.

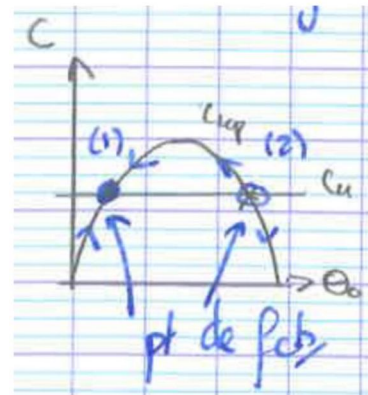
4. La question précédente montre que $mB \sin \theta = \mathcal{M}_r$, c'est-à-dire que la charge mécanique entraînée (décrite par le moment \mathcal{M}_r) n'a d'influence que sur l'angle interne θ mais pas sur la vitesse de rotation. C'est d'ailleurs un des avantages de la machine synchrone par rapport à la machine asynchrone. Le couple maximal que peut fournir le moteur est obtenu pour $\sin \theta = 1$, soit

$$\mathcal{M}_{\max} = mB = 1,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Au delà, le couple exercé par le champ sur le rotor est trop faible pour le mettre en mouvement.

17 Moteur synchrone 2

- $\alpha(t) = \alpha_0 + \omega t = \omega t$
- $C_{Lapl} = \vec{m} \wedge \vec{B} = mB \sin(\theta - \alpha) = mB \sin((\Omega - \omega)t + \theta_0) \vec{u}_z$.
- $\langle C_{Lapl} \rangle = mB \langle \sin((\Omega - \omega)t + \theta_0) \rangle \neq 0$ ssi la fonction sinus est indépendante de t , i.e. $\Omega = \omega$. Dans ce cas, on a $\langle C_{Lapl} \rangle = mB \sin \theta_0$. Ce couple est moteur si il est positif, i.e. $\theta_0 \in [0, \pi]$
- Le système entraîne la charge ssi $|C_{Lapl}| \geq C_u$, i.e. $C_u \leq mB \sin \theta_0$.
- Le système tourne à vitesse constante si $C_{Lapl} = C_u$. Graphiquement, on observe l'existence de deux points de fonctionnement. De plus le TMC s'écrit $J\dot{\omega} = C_{Lapl} - C_u$
 - Si θ_0 augmente alors $\dot{\omega} > 0$ donc le moteur accélère et θ_0 diminue. A l'inverse si θ_0 diminue alors $\dot{\omega} < 0$ donc le moteur ralentit et θ_0 augmente. Le point de fonctionnement est stable.
 - Si θ_0 augmente alors $\dot{\omega} < 0$ donc le moteur ralentit et θ_0 augmente... le moteur accumule le retard. A l'inverse si θ_0 diminue alors $\dot{\omega} > 0$ donc le moteur accélère et θ_0 diminue... le moteur accumule de l'avance. Le point de fonctionnement est instable.



18 Moteur asynchrone

- Supposons la spire immobile. Du fait de la rotation du champ tournant, le flux magnétique au travers de la spire varie. Il y a donc un phénomène d'induction, qui génère un courant dans la spire. Ce courant a pour conséquence l'apparition d'un moment magnétique qui tend à s'aligner avec le champ. Comme le champ tourne, la spire tourne également. On peut donner une vision équivalente à partir de la loi de Lenz : l'effet du courant induit est de diminuer les variations de flux magnétique au travers de la spire, et donc de chercher à donner à la spire une orientation constante par rapport au champ \vec{B} . Comme le champ tourne, la spire tourne également.
Les deux vitesses de rotation ne peuvent pas être égales. Si tel était le cas, en se plaçant dans le référentiel de la spire, le champ magnétique serait fixe et de norme constante, et il ne pourrait donc plus y avoir d'induction. La spire ralentirait alors en raison des frottements ... ce qui impliquerait de nouveau un phénomène d'induction.
- À l'instant t , \vec{n} forme avec \vec{e}_z un angle ωt et \vec{B} un angle $\omega' t$. L'angle θ vaut donc

$$\theta(t) = \omega' t - \omega t = \Omega t$$

La vitesse de glissement Ω est la vitesse angulaire à laquelle \vec{n} et \vec{B} se décalent l'un par rapport à l'autre.

- Circuit électrique équivalent : voir figure 8. Il n'y a pas de couplage inductif à prendre en compte. Le sens de i et de e doit être le même pour pouvoir appliquer la loi de Faraday.

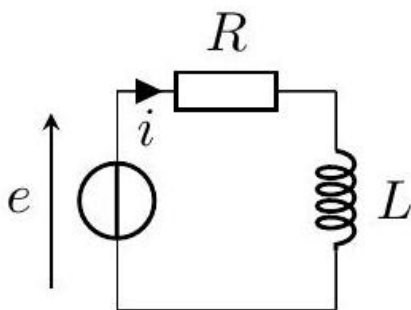


FIGURE 8 – Schéma électrique équivalent à la machine asynchrone.

Calcul de la fém induite : Le flux magnétique au travers de la spire à l'instant t est égal à

$$\phi(t) = S\vec{B} \cdot \vec{n} = SB \cos \theta = SB \cos(\Omega t)$$

On en déduit la f.é.m. induite par le champ extérieur par la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = SB\dot{\theta} \sin \theta \quad \text{soit} \quad e = SB\Omega \sin(\Omega t)$$

Équation électrique : d'après la loi des mailles,

$$e = Ri + L\frac{di}{dt} \quad \text{soit} \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{SB}{L}\Omega \sin(\Omega t)$$

4. L'équation différentielle décrit un circuit en forçage harmonique de pulsation Ω . La pulsation du courant dans la bobine en régime permanent est donc Ω .

Passer l'équation différentielle en représentation complexe pose une difficulté à cause du terme de droite. En représentation complexe $\cos \Omega t \mapsto e^{j\Omega t}$, donc

$$\sin \Omega t = \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) \mapsto e^{j(\Omega t - \pi/2)} = -je^{j\Omega t}$$

Plus astucieux, on peut aussi noter que ce terme de droite s'écrit

$$\frac{E_{\text{ind}}}{L} = -\frac{j\Omega}{L}\Phi = \frac{j\Omega SB}{L}$$

L'équation différentielle devient

$$j\Omega \underline{I}e^{j\Omega t} + \frac{R}{L}\underline{I}e^{j\Omega t} = -j\Omega \frac{SB}{L}e^{j\Omega t}$$

ce qui donne

$$\frac{jL\Omega + R}{L}\underline{I} = -j\Omega \frac{SB}{L}$$

soit

et enfin

$$\underline{I} = -\frac{j\Omega SB}{R + jL\Omega} = \frac{-j\Omega SB(R - jL\Omega)}{R^2 + L^2\Omega^2} = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2}(jR + L\Omega)$$

$$\underline{I}e^{j\Omega t} = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2}(L\Omega - jR)(\cos \Omega t + j \sin \Omega t).$$

On peut alors en déduire $i(t) = \text{Re}[\underline{I}e^{j\Omega t}]$ soit

$$i(t) = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2}(L\Omega \cos \Omega t - R \sin \Omega t)$$

5. Le moment magnétique de la spire est égal à $\vec{m}(t) = i(t)S\vec{n}(t)$, et le couple magnétique auquel la spire est soumise vaut

$$\vec{\Gamma}(t) = \vec{m}(t) \wedge \vec{B} = \|\vec{m}\|\|\vec{B}\| \sin \theta(t)\vec{e}_x \quad \text{d'où} \quad \Gamma = i(t)SB \sin \Omega t \vec{e}_x$$

d'où

$$\Gamma = i(t)SB \sin \Omega t \quad \text{soit} \quad \Gamma = -\frac{\Omega(SB)^2}{R^2 + L^2\Omega^2}(L\Omega \cos \Omega t - R \sin \Omega t) \sin \Omega t.$$

En moyenne, $\langle \sin^2 \Omega t \rangle = 1/2$ et $\langle \sin \Omega t \cos \Omega t \rangle = 0$, d'où

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{R\Omega(SB)^2}{2(R^2 + L^2\Omega^2)}$$

6. Lorsque la vitesse de rotation est nulle, $\omega = 0$ et $\Omega = \omega'$. Le couple moyen exercé sur le rotor est donc non-nul : le moteur asynchrone est donc en mesure de démarrer seul.

7. En régime permanent, le couple moteur moyen $\langle \Gamma \rangle$ doit compenser le couple résistant. Le point de fonctionnement du moteur asynchrone correspond donc à la (aux) vitesse(s) de rotation ω telle(s) que $\langle \Gamma \rangle = \Gamma_r$. Les deux cas sont représentés figure 9 le(s) point(s) de fonctionnement sont situés aux intersections des courbes. Dans le premier cas, un seul point de fonctionnement est possible, et la charge est entraînée à une vitesse de rotation ω légèrement inférieure à ω' . Dans le second cas, deux points de fonctionnement sont envisageables. Celui à plus basse vitesse de rotation est instable : si le couple résistant augmente par exemple sous l'effet d'une perturbation, alors d'après la loi du moment cinétique la vitesse de rotation du moteur diminue ... mais dans ce cas le couple moteur moyen diminue aussi. Le moteur ne peut donc plus entraîner la charge et décroche. Au contraire, pour le point de fonctionnement à plus haute vitesse de rotation, le couple moteur augmente si ω diminue, ce qui permet de compenser la perturbation.

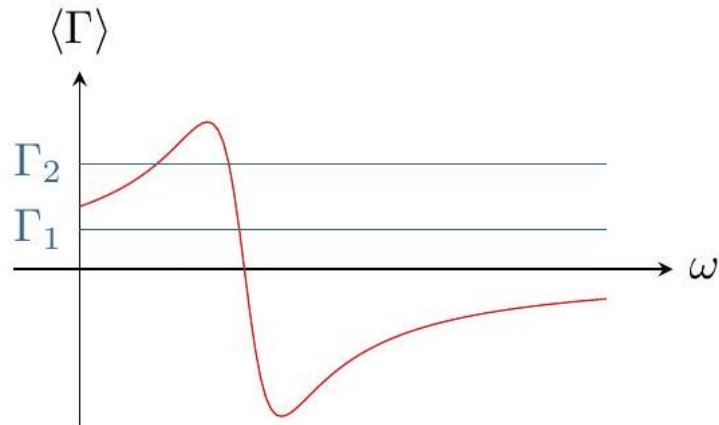


FIGURE 9 – Points de fonctionnement du moteur asynchrone. Les points de fonctionnement sont les points d'intersection des droites bleues représentant le couple résistant et de la courbe rouge représentant le couple moteur moyen.

19 Rails de Laplace inclinés

[d'après oral CCP]

1. La cause du phénomène d'induction est la glissade du barreau sur les rails, dans la direction $+\vec{u}_x$. Le courant induit qui circule dans le circuit génère une force de Laplace induite, dont la loi de Lenz indique qu'elle s'oppose au mouvement : elle freine le barreau, donc est dirigée selon $-\vec{u}_x$. On en déduit que le sens réel du courant lorsqu'il traverse le barreau mobile est selon $-\vec{u}_y$, comme indiqué figure 10 . Le barreau ne peut cependant pas s'arrêter : s'il venait à s'arrêter, alors il n'y aurait plus de variations de flux donc plus d'induction ... et plus de force de Laplace induite pour le retenir, si bien que son poids l'entraînerait à nouveau.

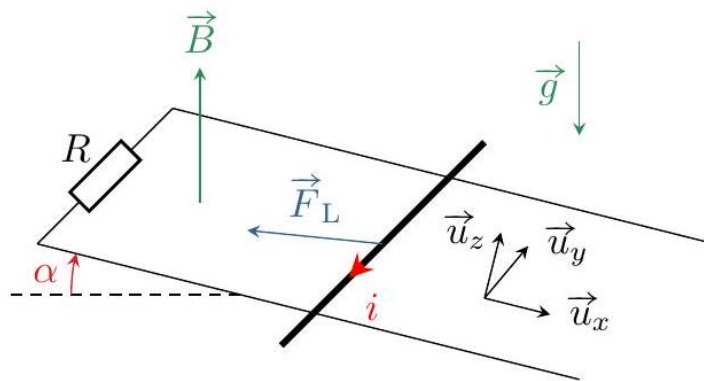


FIGURE 10 – Rails de Laplace inclinés.

2. On choisit le sens positif de i comme étant celui déterminé à la question précédente. La force de Laplace subie par le barreau vaut donc

$$\vec{F}_L = i(-a\vec{u}_y) \wedge \vec{B} \quad \text{avec} \quad \vec{B} = B(-\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_z)$$

ce qui conduit donc à

$$\vec{F}_L = iaB (\sin \alpha \vec{u}_y \wedge \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z) \quad \text{d'où} \quad \vec{F}_L = -iaB (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_z).$$

3. La puissance fournie par la force de Laplace vaut

$$\mathcal{P}_{\text{Lapl}} = \vec{F}_L \cdot (v \vec{u}_x) = -iaBv \cos \alpha$$

Le circuit électrique équivalent, figure 11, ne compte que le générateur induit et la résistance. Ainsi, $e = Ri$.

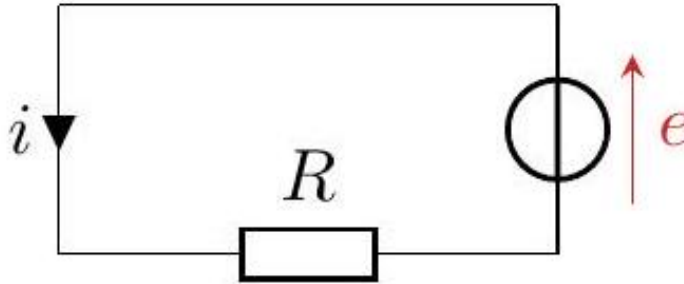


FIGURE 11 – Circuit électrique équivalent aux rails de Laplace inclinés.

Enfin, on utilise la conservation de la puissance,

$$\mathcal{P}_{\text{Lapl}} + ei = 0 \quad \text{d'où} \quad -iaBv \cos \alpha + Ri^2 = 0 \quad \text{soit} \quad Ri = aBv \cos \alpha.$$

4. Système : barreau mobile ;

▷ Référentiel : terrestre, supposé galiléen ;

▷ Bilan des forces :

→ poids du barreau : $\vec{P} = m\vec{g} = mg (\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_z)$

→ force de Laplace : $\vec{F}_L = -iaB (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_z)$

→ réaction des rails, normale aux rails car sans frottement : $\vec{R} = R\vec{u}_z$.

▷ Loi de la quantité de mouvement :

soit en projection sur \vec{u}_x

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_L + \vec{R}$$

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - iaB \cos \alpha$$

En utilisant la question précédente pour remplacer i (découpler les équations électrique et magnétique), on aboutit à

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - \frac{(aB \cos \alpha)^2}{R} v$$

et finalement

$$\frac{dv}{dt} + \frac{(aB \cos \alpha)^2}{mR} v = g \sin \alpha$$

Cette équation différentielle se met sous forme canonique,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = g \sin \alpha \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{(aB \cos \alpha)^2}.$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre, et on sait que τ est la durée du régime transitoire.

▷ Résolution de l'équation différentielle :

→ Forme générale des solutions :

— solution particulière : comme le second membre est constant, la solution particulière est constante, et on trouve

$$0 + \frac{1}{\tau} v_p = g \sin \alpha \quad \text{d'où} \quad v_p = g\tau \sin \alpha = \frac{Rmg \sin \alpha}{(aB \cos \alpha)^2}.$$

— solution générale de l'équation homogène : $v_h = Ae^{-t/\tau}$.

* bilan : $v(t) = Ae^{-t/\tau} + g\tau \sin \alpha$.

→ Détermination de la constante à partir de la condition initiale :

$$v(0) \underset{\text{CI}}{=} 0 \underset{\text{sol}}{=} A + g\tau \sin \alpha \quad \text{d'où} \quad A = -g\tau \sin \alpha.$$

→ Conclusion :

$$v(t) = \frac{Rmg \sin \alpha}{(aB \cos \alpha)^2} (1 - e^{-t/\tau})$$

5. La loi horaire $x(t)$ se déduit par intégration :

$$x(t) = \frac{Rmg \sin \alpha}{(aB \cos \alpha)^2} (t + \tau e^{-t/\tau} + B)$$

La constante B se déduit de la condition initiale,

$$x(0) \underset{\text{CI}}{=} 0 \underset{\text{sol}}{=} \frac{Rmg \sin \alpha}{(aB \cos \alpha)^2} (0 + \tau + B) \quad \text{d'où} \quad B = -\tau.$$

Finalement

$$x(t) = \frac{Rmg \sin \alpha}{(aB \cos \alpha)^2} [t + \tau (e^{-t/\tau} - 1)]$$

6. Par conservation de la puissance, l'énergie fournie à la résistance R pendant la durée de chute est égale à l'opposé du travail de la force de Laplace. En supposant le temps de chute très grand devant τ , on peut considérer qu'à tout instant $v \simeq v_p$. La force de Laplace est donc une force constante. Son travail vaut alors

$$W_L = \int \vec{F}_L \cdot d\vec{M} = (\vec{F}_L \cdot \vec{u}_x) \int_0^L dx = -\frac{(aB \cos \alpha)^2}{R} vL$$

et ainsi

$$W_L = -\frac{(aB \cos \alpha)^2}{R} \frac{Rmg \sin \alpha}{(aB \cos \alpha)^2} L = -mg \sin \alpha L$$

On en déduit l'énergie Q_R fournie à la résistance, égale à l'énergie fournie par le générateur induit,

$$W_L + Q_R = 0 \quad \text{d'où} \quad Q_R = mg \sin \alpha L$$

20 Moteur à courant continu

- $\vec{B}(M) = B\vec{u}_X$ et $\vec{B}(M') = B\vec{u}_X$.
- $\vec{F}_{CD} = ib\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_X = ibB\vec{u}_Y$ et $\vec{F}_{C'D'} = -ib\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_X = -ibB\vec{u}_Y$.
- $\vec{M}_1 = a\vec{u}_X \wedge \vec{F}_{CD} + (-a)\vec{u}_X \wedge \vec{F}_{C'D'} = 2iabB\vec{u}_z$ donc $\mathcal{M}_1 = i\Phi_1$ avec $\Phi_1 = 2abB$.
- Le flux est indépendant de la position de la spire. Toutefois si la spire effectue une demi rotation (CD passe dans le domaine $y < 0$) alors le vecteur moment magnétique de la spire a effectué une rotation de π . Ainsi le couple de Laplace s'exerce dans l'autre sens et la spire devrait repartir en arrière.
- Pendant la moitié du temps de fonctionnement, le couple est positif tandis que pendant l'autre moitié du temps de fonctionnement le couple est négatif. En moyenne, le couple est nul sur une période.

6. Lorsque la spire a effectué une demi rotation, le sens de circulation du courant est changé. Cela permet de renverser le moment magnétique de la spire afin que le couple soit toujours dans le même sens.
7. De par la conception du dispositif, le champ magnétique est radial à la spire quel que soit l'orientation de celle-ci. Il y a une invariance du système par rotation autour de l'axe z . Ainsi, le couple total s'écrit comme la somme des couples de chacune des spires.
8. $P_e = ei = -P_L = -\mathcal{M}\Omega \Rightarrow e = -N\Phi_1\Omega$.
9. $\Omega \propto e$ et $\mathcal{M} \propto i$.