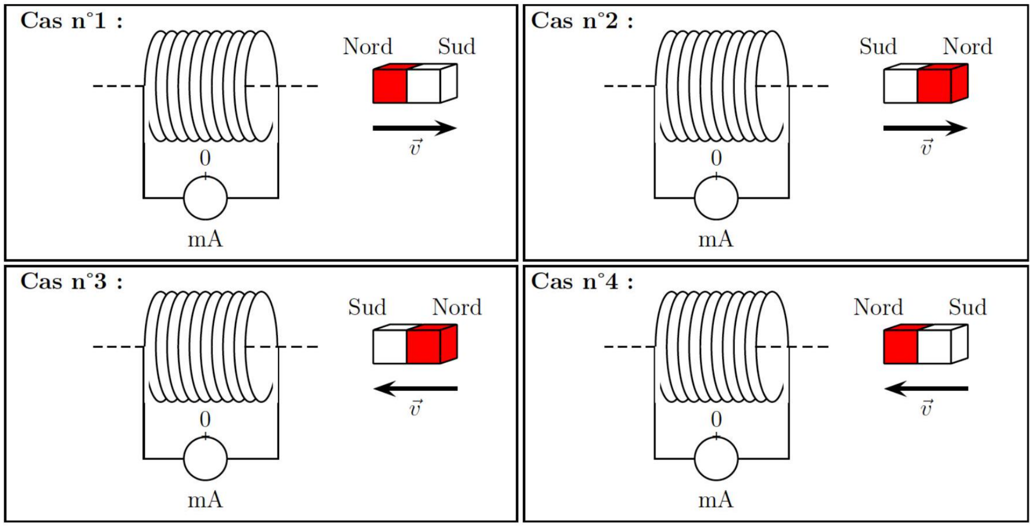
Induction et conversion électromécanique

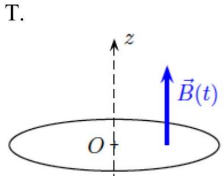
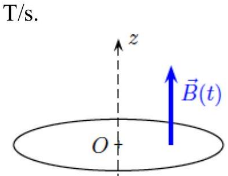
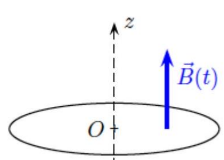
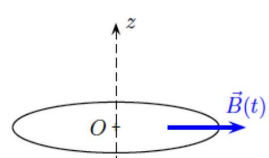
1 Loi de Lenz ⋆

Pour les différentes situations ci-dessous, l'aimant se déplace suivant la direction indiquée par le vecteur v. Prévoir, pour chaque cas, le sens du champ magnétique induit par la bobine et celui du courant induit par application de la loi de Lenz.



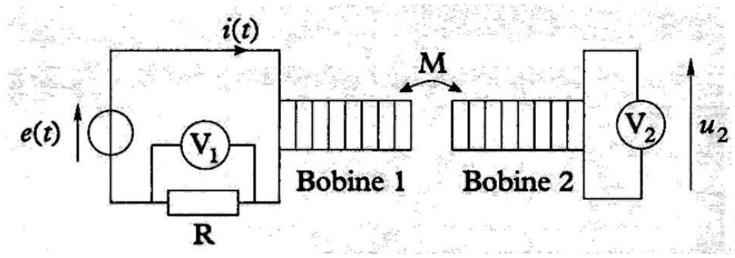
2 Calcul de flux ⋆

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression du flux magnétique puis donner l'expression de la force électromotrice induite dans la spire d'axe (Oz), de surface $S = 10\ \mathrm{cm}^2$.

Cas n°1 : La spire est immobile dans un champ magnétique uniforme et permanent : $\vec{B} = B_0\vec{e_z}$ avec $B_0 = 0{,}1$ T. 	**Cas n°2 :** La spire est immobile dans un champ magnétique uniforme mais variable : $\vec{B} = At\vec{e_z}$ avec A = 0,1 T/s. 
Cas n°3 : La spire est immobile dans un champ magnétique uniforme mais variable : $\vec{B} = B_0\cos(\omega t)\vec{e_z}$ avec $B_0 = 0{,}1$ T et de fréquence f = 50 Hz. 	**Cas n°4 :** La spire est immobile dans un champ magnétique uniforme mais variable : $\vec{B} = B_0\cos(\omega t)\vec{e_x}$ avec $B_0 = 0{,}1$ T et de fréquence f = 50 Hz. 

3 Mesure d'une inductance mutuelle ⋆

Afin de mesure le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines, on réalise le montage ci-dessous où la première bobine est reliée en série avec un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω et avec une résistance.
Deux voltmètres permettent de mesurer les tensions aux bornes de la résistance et de la deuxième bobine.



1. Les voltmètres étant supposés idéaux que vaut l'intensité du courant circulant dans la deuxième bobine ?
2. Représenter les circuits électriques équivalent au montage ci-dessus en faisant apparaître les f.e.m. induites dans chaque bobine.
3. Donner l'expression du flux magnétique dans la bobine 2 en fonction de M et $i(t)$.
4. En déduire l'expression de la tension $u_2(t)$ aux bornes de la deuxième bobine en fonction de M et de $i(t)$, intensité du courant circulant dans la première bobine.
5. Soit $u_1(t) = Ri(t)$ la tension aux bornes de la résistance. Exprimer $u_2(t)$ en fonction de M, R et $\mathrm{u}_1(\mathrm{t})$.
6. En déduire l'expression de M en fonction de R, ω, U_1 et U_2 où U_1 et U_2 sont les amplitudes efficaces des tensions mesurées par les voltmètres V_1 et V_2. (On pourra utiliser la notation complexe)
7. AN : Calculer M avec $\mathrm{U}_1 = 3\ \mathrm{V}, \omega = 4\pi \cdot 10^4 \mathrm{rad/s}, \mathrm{R} = 100\Omega$ et $\mathrm{U}_2 = 5\ \mathrm{V}$.

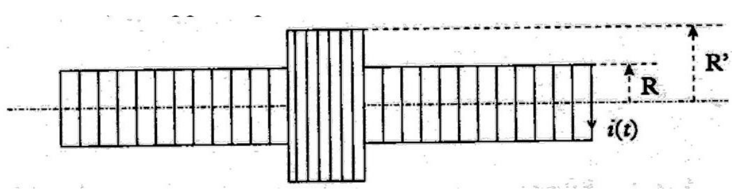
4 Auto-induction et induction mutuelle. ⋆⋆

Soit un solénoïde de rayon $\mathrm{R} = 10\ \mathrm{cm}$, de longueur $\mathrm{d} = 1\ \mathrm{m}$ et comportant $\mathrm{N} = 500$ spires par mètre. On considère que le champ qu'il crée est le même que celui que créerait un solénoïde infini comportant le même nombre de spires par mètre : $B = \mu_0 n I$

1. Etablir la formule donnant l'inductance L de ce solénoïde et la calculer. Rappel : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \mathrm{H/m}$.
2. On note $\mathrm{i(t)}$ le courant circulant dans ce solénoïde. Déterminer l'expression puis la valeur de la fém d'autoinduction e(t) dans les 2 cas suivants :

a. $\mathrm{i} = \mathrm{Cste} = 1\ \mathrm{A}$.
b. i passe de $1\ \mathrm{A}$ à $0\ \mathrm{A}$ en $0,5\ \mathrm{s}$ de façon linéaire.

3. On place autour de ce solénoïde une bobine plus courte, de même axe, de rayon R' $= 20\ \mathrm{cm}$ et comportant $N' = 100$ spires. Exprimer le flux ϕ créé par le solénoïde à travers la bobine lorsqu'il est parcouru par un courant i (on suppose que les deux bobines sont orientées dans le même sens).



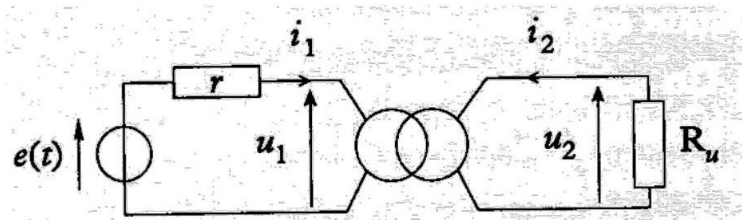
4. En déduire l'expression du coefficient d'inductance mutuelle, M, en fonction de d, N, N' et R et le calculer.
5. Déterminer la fem induit dans la bobine, $e'(\mathrm{t})$, dans les 2 cas suivants :

a. $\mathrm{i} = \mathrm{Cste} = 1\ \mathrm{A}$.
b. i passe de $1\ \mathrm{A}$ à $0\ \mathrm{A}$ en $0,5\ \mathrm{s}$ de façon linéaire.

6. Le solénoïde est parcouru par un courant $i(t) = i_0 \sin(\omega t)$ et la bobine par un courant $i'(t) = i'_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Donner l'expression de l'énergie magnétique moyenne, $\langle U_m \rangle$, stockée dans le solénoïde puis de celle correspondant au couplage, $\langle U_e \rangle$. Les calculer pour $\mathrm{i}_0 = 1\ \mathrm{A}, \mathrm{i}_0 = 0,1\ \mathrm{A}$ et $\varphi = 60°$. On rappelle que $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$.

5 Transformateur ⋆⋆

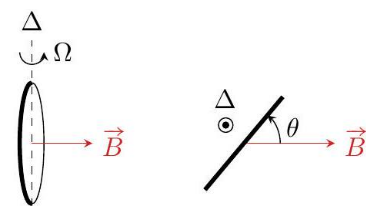
On considère un transformateur parfait comportant N_1 spires au primaire et N_2 spires au secondaire. On note $L_1 = N_1^2 L_0$ et $L_2 = N_2^2 L_0$ les inductances propres des deux bobinages du primaire et du secondaire. L_0 est une constante ne dépendant que de la géométrie des bobines. Le primaire est relié à un générateur de fem e(t) et de résistance interne r et le secondaire à une charge modélisée par une résistance $\mathrm{R_u}$. On note u_1 la tension d'entrée et u_2 la tension de sortie. Toutes les tensions et intensités sont alternatives, de valeur moyenne nulle.



1. En utilisant le fait que le couplage magnétique est total entre le primaire et le secondaire pour un transformateur parfait, donner l'expression de l'inductance mutuelle M entre le primaire et le secondaire en fonction de $\mathrm{N}_1,\ \mathrm{N}_2$ et L_0.
2. Représenter le schéma électrique équivalent au circuit ci-dessus et écrire deux équations reliant les tensions u_1 et u_2 aux intensités i_1 et i_2. (on se réfèrera au cours sur les circuits couplés) 3) Retrouver l'expression de $\mathrm{u}_2/\mathrm{u}_1$ vue en cours à partir des équations de la question précédente. On posera $m = \mathrm{N}_2/\mathrm{N}_1$
3. On suppose maintenant que $R_u = 0$ (sortie en court-circuit). Déterminer i_2 en fonction de i_1 et m. On admettra que ce résultat reste vrai pour $\mathrm{R_u} \neq 0$.
4. Montrer que la puissance P_1 fournie par le générateur est égale à la puissance P_2 reçue par la charge.

6 Spire en rotation ⋆

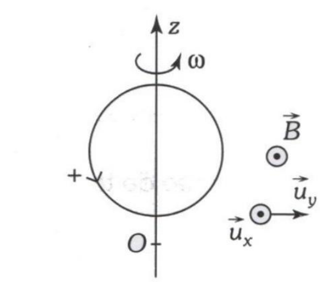
Considérons une spire conductrice circulaire de surface S et de résistance électrique r. Cette spire est mise en rotation à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$ constante autour d'un de ses diamètres, qui définit l'axe Δ, voir les figures en perspective et vue de dessus ci-contre. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}$ orthogonal à Δ.

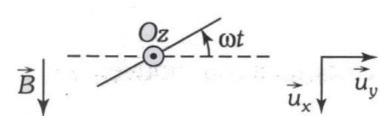


1. Établir l'expression de la f.é.m. induite dans la spire. En déduire celle du courant induit dans la spire.
2. Déterminer le moment magnétique instantané de la spire.
3. En déduire le couple de Laplace instantané puis moyen qui s'exerce sur la spire. Quel est qualitativement son effet sur le mouvement de la spire ? Aurait-on pu le prévoir sans calcul ?

7 Principe d'un alternateur ⋆

Une spire circulaire de rayon a et de résistance interne R tourne autour de l'axe Oz à vitesse angulaire ω constante, entraînée par un couple moteur Γ_m. À l'instant $t = 0$, la spire est dans le plan yOz. Elle est de plus placée dans un champ magnétique uniforme et permanent, horizontal $\vec{B} = B\vec{u_x}$

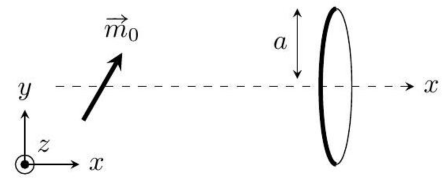




1. Expliquer les phénomènes ayant lieu.
2. Calculer la f.e.m. e induite dans la spire. En déduire l'intensité i la parcourant.
3. Quel est le couple Γ_{Lapl} exercé par le champ sur la spire ? Celle-ci pourra être assimilée à un dipôle magnétique.
4. Appliquer le théorème du moment cinétique scalaire à la spire. Que devient-il dans le cas d'un régime stationnaire ?
5. Comparer la puissance dissipée par effet Joule et la puissance fournie par le moteur qui entraîne la spire. Quel est le rendement de la transformation énergie mécanique en énergie électrique ?

8 Principe de fonctionnement d'un générateur synchrone ⋆⋆

Un aimant de moment magnétique $\vec{m}_0$ est placé dans le plan (Oxy). Un système mécanique le met en rotation à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz). Une spire circulaire de rayon a et de résistance R est placée sur l'axe (Ox) à distance $x \gg a$.
Donnée : en coordonnées polaires d'axe colinéaire à $\vec{m}$, un moment magnétique $\vec{m}$ placé à l'origine crée en un point M quelconque un champ magnétique

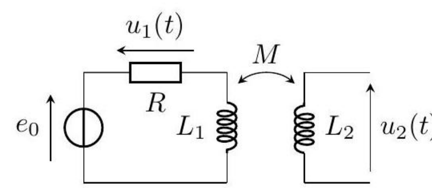


$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta\right)$$

1. Déterminer l'intensité i du courant induit dans la spire. En déduire la puissance électrique qu'elle reçoit.
2. Exprimer le couple magnétique subi par l'aimant
3. Quel puissance le système mécanique doit-il fournir à l'aimant pour maintenir la vitesse constante ? Conclure : en quoi a-t-on modélisé un générateur électrique rudimentaire ?

9 Mesure d'une inductance mutuelle

Le montage ci-contre permet de mesurer le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines. Les deux bobines se font face comme sur la figure. La première bobine est montée en série avec une résistance $R = 100\Omega$ et un générateur de tension e_0 harmonique de fréquence $f = 2,0\text{kHz}$. Les tensions u_1 et u_2 sont mesurées grâce à un oscilloscope supposé idéal, c'est-à-dire de résistance d'entrée infinie.



1. Quelle est l'intensité circulant dans la bobine 2 ? D'après la loi de comportement habituelle de la bobine, que vaudrait alors la tension u_2 ? Pourquoi cette loi n'est elle pas applicable telle quelle ici ?
2. Exprimer la tension u_2 en fonction de M et u_1.
3. Calculer M sachant que les tensions lues à l'oscilloscope ont des amplitudes $U_1 = 3,00\ \text{V}$ et $U_2 = 0,50\ \text{V}$.
4. On fait tourner la bobine sur elle-même dans le plan de la paillasse. Indiquer sans calcul comment est modifiée la valeur de M lorsque l'angle de rotation vaut 180° ? 90° ? Même question si l'on aligne les axes des deux bobines.

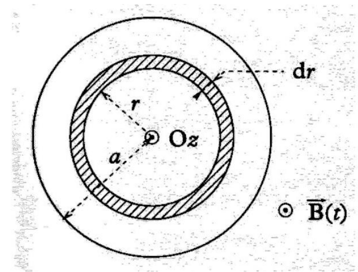
10 Plaque à induction 1 ⋆⋆

Le chauffage du fond métallique des casseroles et autres poêles de cuisson peut être réalisé par effet Joule des courants induits directement dans le fond de la casserole par un champ magnétique variable, les courants de Foucault.
Logé dans une table support en céramique, un bobinage alimenté en courant sinusoïdal, appelé inducteur, génère ce champ. L'inducteur a un rayon de $5\ \text{cm}$ et compte vingt spires de cuivre de résistance électrique $R_1 = 18\ \text{m}\Omega$ et d'auto-inductance $L_1 = 30\mu\text{H}$. Il est alimenté par une tension harmonique v_1 de pulsation ω. Du point de vue électromagnétique, on modélise le fond de casserole par une spire circulaire unique, fermée sur elle-même, appelée induit. L'induit a une résistance $R_2 = 8,3\ \text{m}\Omega$ et une auto-inductance $L_2 = 0,24\mu\text{H}$. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par couplage inductif entre l'inducteur et l'induit d'inductance mutuelle $M = 2\mu\text{H}$.

1. En s'appuyant sur un schéma électrique équivalent, établir les équations électriques relatives aux deux circuits.
2. En déduire l'expression littérale de la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{I}_2/\underline{I}_1$.
3. En déduire l'impédance d'entrée $\underline{Z}_\text{e} = \underline{V}_1/\underline{I}_1$ du système.
4. La pulsation ω est choisie bien plus grande que R_1/L_1 et R_2/L_2. Simplifier les deux expressions précédentes et calculer numériquement leur module.
5. On soulève la casserole. Indiquer qualitativement comment varie l'amplitude du courant appelé par l'inducteur.

11 Plaque à induction 2 ⋆⋆⋆

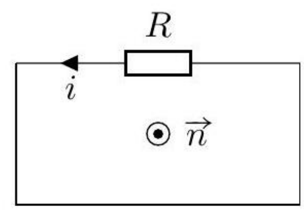
On cherche dans cet exercice à déterminer la puissance thermique reçue par le fond d'une casserole posée sur une plaque à induction.
On assimile le fond de la casserole à un cylindre de rayon a, d'épaisseur h et d'axe Oz.
La plaque à induction crée en son sein un champ magnétique : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{u_z}$.
Pour étudier les courants créés dans le fond de la casserole, on modélise ce dernier par un ensemble de spires circulaires concentriques d'axe Oz, d'épaisseur h et de largeur dr.
On admettra que la conductance électrique dG (inverse de la résistance) d'une de ces spires, de rayon r, s'écrit $dG = \frac{h}{2\pi r}\gamma dr$ où γ est la conductivité du métal utilisé.



1. Exprimer la fem induite dans une spire de rayon r.
2. En déduire le courant élémentaire di induit dans une spire, assimilée à un circuit filiforme de conductance dG.
3. En déduire la puissance moyenne dP dissipée par effet Joule dans une spire.
4. Déterminer alors la puissance totale P, dissipée dans le fond de la casserole en fonction de $\mathrm{B_0}, \omega$, h, γ et a.
5. AN : Calculer P avec $\gamma = 10^7\ \mathrm{S/m}, \mathrm{h} = 5\ \mathrm{mm}, \mathrm{a} = 10\ \mathrm{cm},\ \mathrm{B_0} = 0,1\ \mathrm{T}, \omega = 100\pi \mathrm{rad/s}$
6. Comment peut-on procéder, en pratique, pour faire varier la puissance reçue par la casserole ?

12 Peut-on négliger l'auto-induction ? ⋆⋆

Comme indiqué en cours, on fait très souvent l'approximation de négliger l'auto-induction dans les circuits ne comportant aucun bobinage. On s'intéresse dans cet exercice à la validité de cette approximation pour un circuit a priori quelconque schématisé ci-contre, d'autoinductance L. Le schéma ne préjuge pas de la présence ou non de bobinages. Le circuit, de surface totale S et de résistance R, est plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_{\text{ext}} = B_0 \cos \omega t \vec{n}$



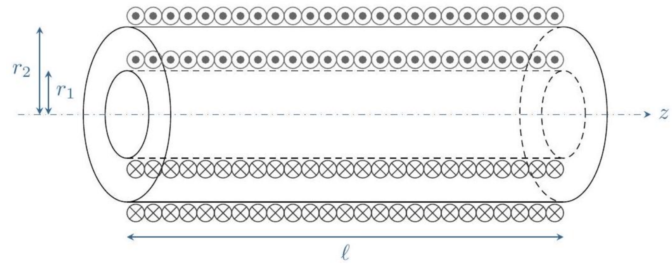
1. Commençons par ne prendre en compte que la f.é.m. induite par le champ $\vec{B}_{\text{ext}}$. Calculer son flux au travers du circuit, et en déduire le schéma électrique équivalent. Que vaut l'intensité i ?
2. Considérons en plus le phénomène d'auto-induction. Exprimer le flux magnétique au travers du circuit et représenter le schéma électrique équivalent. Établir l'équation différentielle vérifiée par i.
3. Passons maintenant en notation complexe. Exprimer le rapport $|\underline{H}| = |\underline{E}_L| / |\underline{E}_{\text{ext}}|$ des amplitudes de la f.é.m. auto-induite et de la f.é.m. induite par le champ extérieur. En déduire à quelle condition sur la pulsation la f.é.m. auto-induite est négligeable.
4. Pour fixer les idées, calculer numériquement la pulsation et la fréquence caractéristiques avec des valeurs de R et L utilisées habituellement en TP d'électronique. Quel résultat connu retrouve-t-on ?
5. En proposant des ordres de grandeur raisonnables, refaire le même calcul pour un circuit de même résistance mais à une seule « spire » composée d'un fil de cuivre de TP. L'inductance d'un circuit circulaire de diamètre D est donnée par

$$L = \mu_0 \frac{D}{2}\left(\ln \frac{8D}{d} - 2\right)$$

où d est le diamètre du fil de cuivre. Est-il légitime de négliger l'inductance du circuit ?

13 Solénoïdes imbriqués ★★

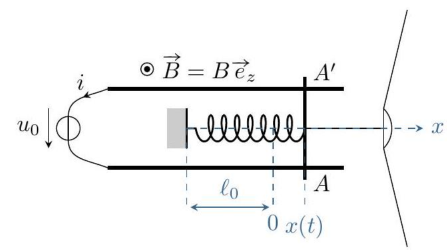
Deux solénoïdes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de même axe (Oz), de même longueur ℓ et de rayons r_1 et $r_2 > r_1$ sont emboîtés l'un dans l'autre, voir la figure. Ils présentent tous deux le même nombre de spires N. On suppose que la longueur ℓ est très supérieure aux rayons.
La bobine intérieure est parcourue par un courant $i_1(t) = I\cos(\omega t)$, avec $I = 1$ A. La bobine extérieure est en court-circuit.



1. Déterminer les coefficients d'induction propre L_1, L_2, et le coefficient d'induction mutuelle M.
2. En négligeant les résistances internes des fils, déterminer le courant $i_2(t)$ parcourant la bobine extérieure. Quelle est son amplitude ?
3. Que vaut le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde central ?

14 Haut parleur simplifié ★

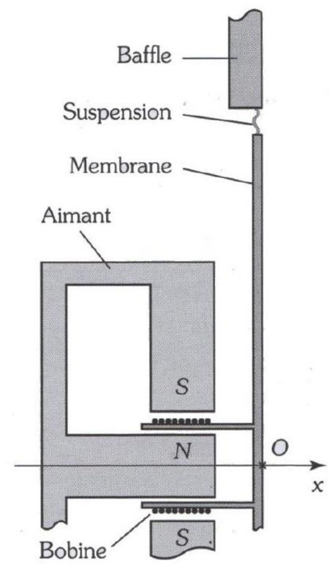
On s'intéresse dans cet exercice à un modèle très simplifié de hautparleur, dans une configuration proche des rails de Laplace où la membrane du haut parleur est fixée solidairement à la tige mobile, qui est également reliée élastiquement à un bâti. La tige mobile a pour longueur $AA' = a$, et sa position est repérée par son abscisse x, dont l'origine correspond à la position de repos. Les frottements de l'air sur la membrane se traduisent par une force de frottement linéaire $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x$. Le système est forcé électriquement par la tension de commande u_0. On note R la résistance électrique de l'ensemble, et on néglige l'auto-induction.

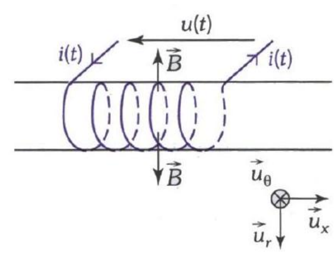


1. Exprimer en fonction de $\dot{x}$ la f.é.m. induite.
2. Écrire les équations électrique et mécanique.
3. Découpler ces équations pour aboutir à une unique équation différentielle portant sur la position x de la tige mobile. Quel type d'équation obtient-on ? L'analyser physiquement : comment se traduisent les phénomènes d'induction ? Commenter leur signe.
4. Procéder à un bilan de puissance du système et interpréter physiquement chaque terme.

15 Haut-Parleur ⋆⋆

Un haut-parleur est schématisé ci-contre. De symétrie autour de l'axe x indiqué, il se compose d'un aimant permanent fixe, assurant un champ magnétique radial d'intensité constante et uniforme B dans son entrefer. La membrane est fixée à un baffle plan, rigide, immobile, de grandes dimensions, par une suspension souple lui permettant un déplacement parallèlement à elle-même suivant l'axe x. Sa position $x(t)$ est ramenée par cette suspension à un positionnement moyen par une force de rappel proportionnelle à son déplacement $\overrightarrow{F_r} = -kx\overrightarrow{u_x}$. Sur cette membrane est collé un cylindre portant une bobine. On supposera que l'amplitude de déplacement de la bobine ne lui permet pas de quitter la région de l'entrefer où le champ magnétique est radial et d'amplitude uniforme. Cette bobine est soumise à une tension $u(t)$ et on note $i(t)$ l'intensité qui la parcourt. La bobine possède une résistance interne R, un coefficient d'auto-inductance L et la longueur de fil est l. Le couplage du haut-parleur avec l'air est modélisé par une force $\overrightarrow{F_f} = -f\dot{x}\overrightarrow{u_x}$ subie par la membrane.





1. Quelles sont les forces exercées sur l'ensemble membrane-bobine de masse m ? En déduire son équation du mouvement.
2. Donner un schéma électrique équivalent au système. Pour évaluer la force électromotrice d'induction, on procédera par analogie avec des rails de Laplace d'écartement l, sur lesquels glisse une barre de vitesse $\vec{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x}$ (identique à celle de la bobine), le tout plongé dans un champ magnétique orthogonal au circuit mais de direction opposée au vecteur surface. En déduire l'équation différentielle régissant le circuit électrique.
3. Établir une unique équation établissant le bilan global de puissance pour le système. On précisera clairement le sens physique des six termes présents.
4. On se place en régime sinusoïdal forcé. Montrer que plusieurs termes de ce bilan sont nuls en moyenne.
   Rappel : $\langle s_1 s_2 \rangle = \frac{1}{2}\Re\left(\underline{s_1}\,\underline{s_2}^*\right)$ où $\underline{s_2}^*$ est le complexe conjugué de $\underline{s_2}$.
5. Définir et exprimer le rendement du haut-parleur.

16 Moteur synchrone 1 ⋆

Considérons un modèle simple de moteur synchrone. Le rotor, de moment magnétique $\vec{m}$, tourne avec la même vitesse angulaire ω constante que le champ magnétique $\vec{B}$ qui l'entraîne. On néglige tout frottement interne au moteur. On s'intéresse à l'angle interne du moteur θ orienté de $\vec{m}$ vers $\vec{B}$ et au couple $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ exercé par le champ sur le moment magnétique. On prendra $B = 0,2\ \mathrm{T}, m = 8\ \mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$ et une fréquence de rotation de 50 tours par seconde.

1 - Proposer un dispositif simple permettant de réaliser le champ magnétique tournant.

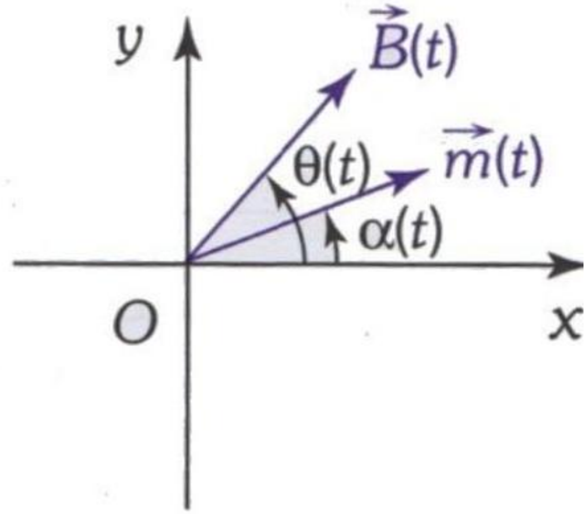
2 - Que vaut θ si le moteur fonctionne à vide ?

3 - Le moteur doit entraîner une charge mécanique qui exerce un couple résistant $\mathcal{M}_\mathrm{r} = 0,65\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$. Calculer l'angle interne et la puissance mécanique fournie par le moteur. D'où provient cette puissance ?

4 - La vitesse de rotation dépend-elle de la charge ? Quel est le couple maximal que peut fournir ce moteur ?

17 Moteur synchrone 2 ⋆

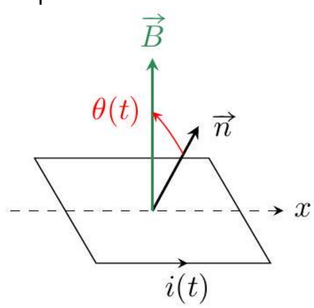
Un aimant de moment dipolaire $\vec{m}$ peut tourner sans frottement dans le plan xOy autour de l'axe Oz. Cette aimant est soumis à un champ magnétique tournant $\vec{B} = B\vec{u}(t)$, où le vecteur $\vec{u}(t)$ fait un angle $\theta(t) = \Omega t + \theta_0$ avec l'axe Ox, et où $\Omega \geq 0$ et θ_0 sont des constantes. L'aimant est supposé tourner à la vitesse angulaire constante ω positive.

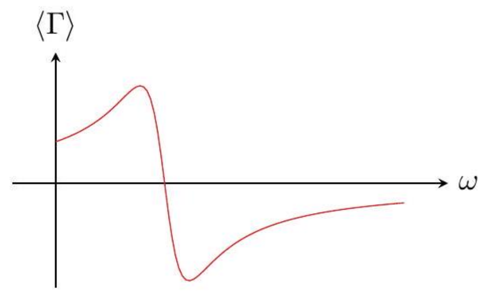


1. Quel est l'angle $\alpha(t)$ entre $\vec{m}$ et l'axe Ox, en supposant sa valeur initiale nulle ?
2. Quel est le couple C_{Lapl} exercé par le champ magnétique sur le dipôle ?
3. À quelle condition sa valeur moyenne est-elle non nulle ? On se placera désormais dans ce cas. Quelles sont les valeurs possibles de θ_0 pour que ce couple soit moteur ?
4. L'aimant entraîne une charge en rotation. Le couple exercé par la charge sur l'aimant est supposé constant et noté $-C_u$, avec $C_u \geq 0$. À quelle condition sur C_u le moteur peut-il entraîner cette charge ? 5. Dans ce dernier cas, quelles sont les valeurs de θ_0 possibles ? Discuter de la stabilité de fonctionnement du moteur dans chacun de ces cas.

18 Moteur asynchrone ⋆⋆

Le bobinage du rotor d'une machine asynchrone peut être modélisé par une spire unique de résistance R, d'inductance L et de surface S tournant à vitesse angulaire constante ω autour d'un axe (Ox). La normale $\vec{n}$ à la spire est contenue dans le plan (Oyz). Cette spire est plongée dans un champ $\vec{B}$ généré par le stator, localement uniforme, contenu dans le plan (Oyz), de norme constante, tournant à vitesse angulaire constante ω' autour de (Ox). Ce dispositif est utilisé en moteur électrique : le champ magnétique entraîne le rotor.

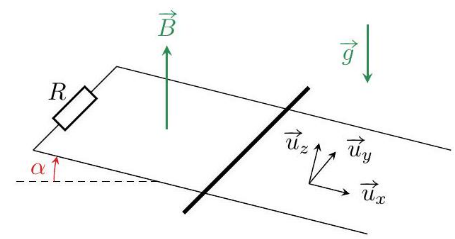




1 - Expliquer qualitativement (sans équation !) pourquoi la spire tourne. Les deux vitesses ω et ω' peuvent-elles être identiques ?
2 - Pour simplifier, on suppose qu'à l'instant initial $\vec{n}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires et de même sens selon $\vec{e}_z$. Exprimer l'angle θ en fonction de $\Omega = \omega' - \omega$. Que représente physiquement la vitesse de glissement Ω ?
3 - Établir l'équation différentielle régissant l'évolution du courant dans le rotor en fonction de Ω.
4 - On se place en régime permanent. Déterminer la pulsation du courant dans la bobine et résoudre l'équation différentielle obtenue précédement à l'aide de la représentation complexe. Écrire la solution comme une somme de sinus et cosinus.
5 - En considérant le moment magnétique $\vec{m}$ de la spire, calculer le couple auquel elle est soumise. En déduire le couple moyen $\langle\Gamma\rangle$ s'exerçant sur la bobine.
6 - L'allure de la courbe représentant $\langle\Gamma\rangle$ en fonction de ω est donnée ci-dessus. Le moteur peut-il démarrer seul ?
7 - Le moteur doit entraîner une charge mécanique exerçant un couple résistant Γ_r connu. Justifier graphiquement qu'un ou deux points de fonctionnement, c'est-à-dire une ou deux vitesses de rotation ω, sont possibles. En raisonnant en termes de stabilité par rapport à Γ_r, justifier qu'un de ces deux points de fonctionnement n'est pas utilisable en pratique. Lequel et pourquoi ?

19 Rails de Laplace inclinés ★★

Un barreau métallique de masse m glisse sans frottement mécanique sur deux rails conducteurs, séparés d'une distance a et inclinés d'un angle α par rapport à l'horizontale. Les rails sont fermés sur une résistance R, et un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, dirigé selon la verticale ascendante, règne entre eux. On repère par $x(t)$ la position du barreau le long des rails.



1. En appliquant la loi de Lenz, donner le sens du courant i qui circule dans le circuit. La force de Laplace accélère-t-elle ou freine-telle la chute du barreau ? Le barreau peut-il s'immobiliser ?
2. Exprimer la force de Laplace $\vec{F}_\mathrm{L}$ qui s'exerce sur le barreau mobile en fonction de i, a, B et α.
3. En exploitant la conservation de la puissance, obtenir une relation entre i, R, a, B, α et la vitesse v du barreau.
4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par v et la résoudre, sachant que le barreau est lâché en $x = 0$ sans vitesse initiale. Justifier que le mouvement présente un régime transitoire de durée caractéristique τ à déterminer.
5. En déduire $x(t)$.
6. Les rails ont une longueur totale L. Déterminer l'énergie électrique totale transmise à la résistance R lors du mouvement du barreau sur les rails, en supposant le temps de chute très grand devant τ. Interpréter.

20 Moteur à courant continu ★★

Le rotor (partie mobile) du moteur constitué de N spires rectangulaires (de cotés $2a$ et b) tournant autour d'un axe Δ coïncidant avec l'axe Oz, passant par le centre O et parallèle aux cotés CD et $C'D'$. Il est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$.

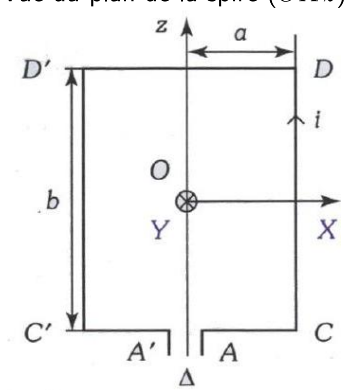
— Le champ $\vec{B}$ est négligeable sur les brins DD', AC et $A'C'$.

— Sur les brins CD et $C'D'$, il est radial et de norme B pratiquement constante.

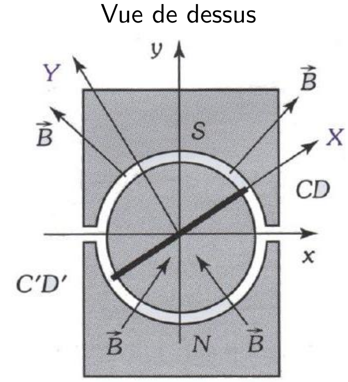
— Dans le domaine $y < 0$ (ce qui est le cas du brin $C'D'$ dans la position représentée sur la figure), $\vec{B}$ est radial entrant alors qu'il est radial sortant dans le domaine $y > 0$ (cas du brin CD).

Un point M courant du brin CD sera repéré par $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{u_x} + b\overrightarrow{u_z}$, avec $z \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$.
La forme des pièces polaires N et S de l'aimant et la présence d'un noyau de fer cylindrique d'axe Oz permettent d'obtenir un champ magnétique $\vec{B}$ pratiquement radial, au niveau des brins CD et $C'D'$.

Vue du plan de la spire (OXz)



Vue de dessus



1. Comparer les directions et les sens des champs $\vec{B}$ en un point M du tronçon CD et en un point M' du tronçon $C'D'$
2. Comparer les forces de Laplace $\vec{F}_{CD}$ et $\vec{F}_{C'D'}$, s'exerçant sur ces deux tronçons.
3. Montrer que le moment $\mathcal{M}_1$ par rapport à l'axe Δ des forces de Laplace s'exerçant sur la spire peut se mettre sous la forme $\mathcal{M}_1 = i\Phi_i$. Exprimer Φ_1 et montrer qu'il a les dimensions d'un flux magnétique.
4. L'expression de Φ_1 dépend-elle de la position de la spire ? Que se passe-t-il si le brin CD passe dans le domaine $y < 0$?
5. Quelle serait la valeur moyenne de $\mathcal{M}_1$ sur un tour si l'intensité i, comptée positivement dans le sens de CD, était constante ?

6. En fait, un commutateur permet d'avoir toujours une intensité de même signe dans le brin qui évolue dans la zone $y > 0$. Quel est l'intérêt de cette commutation ?
7. Dans la suite, on admettra que le moment des efforts de Laplace s'exerçant sur le rotor dans son ensemble peut s'écrire $\mathcal{M} = \Phi i$ avec $\Phi = N\Phi_1$, quelle que soit la position du rotor. Justifier ce résultat et indiquer l'approximation effectuée.
8. Les spires tournent à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe Δ. Calculer la f.e.m. e induite. On utilisera le fait que la puissance du couple de Laplace est opposée à la puissance de la f.e.m. induite.
9. Quel résultat bien connu retrouve-t-on ?