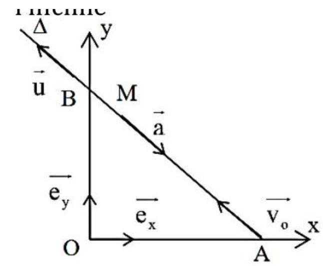
Cinématique

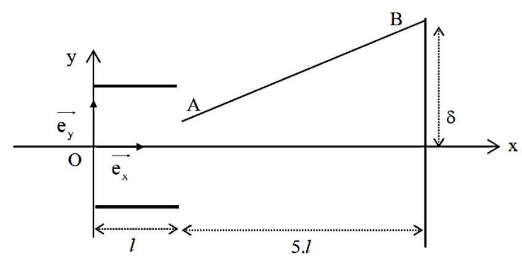
1 Mouvement uniformément accéléré - montée d'une bille sur un plan incliné



Dans un référentiel $R\,(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, un mobile ponctuel se déplace sur un axe Δ passant par les points $\mathrm{A}(\mathrm{D}, 0, 0)$ et $\mathrm{B}(0, \mathrm{D}, 0)$.
On note $\overrightarrow{\mathrm{u}}$ le vecteur unitaire de Δ. Le mobile part de A à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale $\overrightarrow{\mathrm{v_o}} = \mathrm{v_0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{u}}$. Ce mobile est soumis à une accélération constante, dirigée de B vers A de norme a.

1. Justifier que la vitesse de M dans R peut s'écrire : $\vec{v} = \left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_R$
2. Déterminer la fonction $\overrightarrow{AM}(t)$. Quelle est la condition sur a, v_0 et D pour que le mobile puisse atteindre le point B ?

2 Mouvement uniformément accéléré - trajectoires des électrons dans un oscilloscope

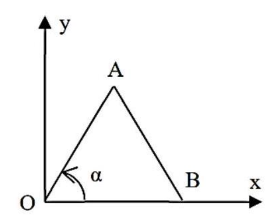


On étudie le mouvement des électrons formant le faisceau qui arrivant sur l'écran laisse une trace fluorescente.
Les électrons arrivent en O avec une vitesse $\overrightarrow{\mathrm{v_o}} = \mathrm{v_o} \cdot \overrightarrow{e_{\mathrm{x}}}$. Ils traversent les plaques de déviation P_1 et P_2 de longueur l. Entre ces plaques, ils sont soumis à une accélération constante $\overrightarrow{a_o} = a_0 \cdot \mathrm{e_y}$ et sont déviés.
A la sortie des plaques, en A, leur vitesse est $\overrightarrow{\mathrm{v_A}}$ et fait l'angle α avec $\overrightarrow{e_x}$. De A à B, point d'impact, leur accélération est nulle.

1. Déterminer la trajectoire des électrons entre les plaques de déviation.
2. Déterminer, puis calculer α
3. Déterminer la trajectoire des électrons entre A et B. Calculer la déviation δ Données $\mathrm{v_0} = 3.10^7\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $\mathrm{a_o} = 10^{15}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et $l = 5\ \mathrm{cm}$

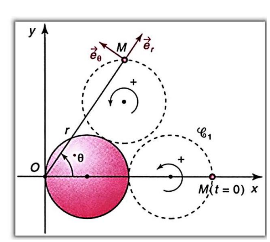
3 Mouvement circulaire - chute d'une échelle

Une échelle double est posée sur le sol, un de ses points d'appui restant constamment en contact avec le coin O d'un mur.
La position de l'échelle à l'instant t est repérée par l'angle $\alpha(\mathrm{t})$ formé par la portion d'échelle OA avec le sol. L'extrémité B glisse sur le sol. L'échelle est telle que $\mathrm{OA} = \mathrm{AB} = \mathrm{L}$.



1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse $\overrightarrow{\mathrm{v_A}}$ et accélération $\overrightarrow{a_A}$ du point A dans R dans la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ en fonction de L, α, $\dot{\alpha}$ et $\ddot{\alpha}$.
2. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse $\overrightarrow{v_B}$ et accélération $\overrightarrow{a_B}$ du point B dans R dans la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ en fonction de L, $\alpha, \dot{\alpha}$ et $\ddot{\alpha}$.

4 Mouvement cycloïdal 1



Cette courbe, appelée cardioïde par Castillon en 1741, est générée par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur un cercle fixe de même rayon R. Un point M du cercle C_1 décrit la courbe plane d'équation en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r(\theta) = \frac{r_0}{2}(1 + \cos\theta) \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

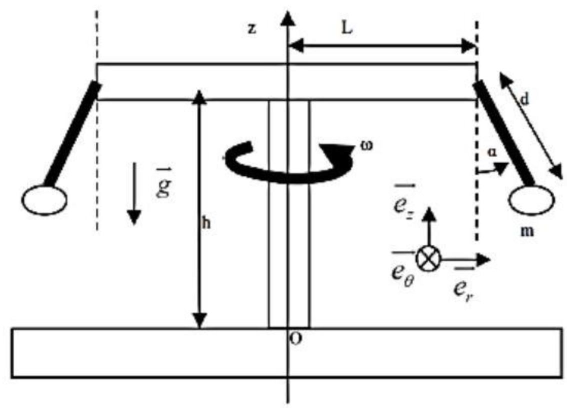
1. Que représente la constante positive r_0 ? Exprimer celle-ci en fonction de R.
2. Quel est, dans le référentiel $\mathcal{R}\,(\mathrm{O}, \vec{e}_x, \vec{c}_y)$, l'allure de la trajectoire de M ?
3. Exprimer dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, la vitesse $\vec{v}$ de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de r_0, ω et t.
4. Calculer la norme v du vecteur vitesse en fonction de r_0, ω et t.. En quel point cette vitesse est-elle nulle ?
5. En déduire le périmètre p de la trajectoire en fonction de R.

5 Mouvement cycloïdal 2

Une roue de rayon R et de centre C roule sans glisser sur un axe Ox, en restant dans le plan (xOz). La vitesse de C par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol est $\vec{v}_{C/\mathcal{R}} = v\vec{u}_x$ avec v constante réelle positive. Soit M un point lié à la roue, situé sur la circonférence. Son mouvement est paramétré par l'angle $\theta(t)$ dont a tourné la roue à partir de sa position initiale. À l'instant $t = 0, M$ est confondu avec l'origine O et C a pour coordonnées $(0, 0, R)$.

1. Comment exprimer la condition "roule sans glisser" ?
2. Déterminer dans le référentiel $\mathcal{R}$ à l'instant t : les coordonnées du point M ; le vecteur vitesse de M ; le vecteur accélération de M. On utilisera la base cartésienne.
3. Déterminer dans $\mathcal{R}$ les vecteurs vitesse et accélération de M aux moments où celui-ci touche le sol.
4. Tracer l'allure de la trajectoire de M en choisissant quelques points caractéristiques.
5. Déterminer la longueur d'un arc de cycloïde.

6 Mouvement circulaire et hélicoïdal



Un manège est constitué de bras horizontaux de longueur L, placés à une hauteur h au-dessus du plateau, auxquels sont liées des nacelles par une attache de longueur d et de masse négligeable. Les nacelles sont modélisées comme des points matériels de masse m. On note g l'intensité du champ de pesanteur.
Le manège est entraîné en rotation à une vitesse angulaire ω par rapport au référentiel terrestre. On considère dans toute la suite que cette vitesse angulaire est constante. La fixation permet aux nacelles de basculer dans un plan vertical contenant le bras suspenseur, l'attache faisant alors un angle α avec la verticale.
On note $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ la base cylindrique d'axe (Oz)

1. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, dans la base cylindrique, en fonction de h, L, d et α. En déduire l'expression générale de la vitesse $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ en fonction de $L, d, \alpha, \dot{\alpha}$ et $\dot{\theta} = \omega$
2. L'angle α et la vitesse angulaire ω sont maintenant supposés invariants. Quelle est alors la trajectoire décrite par la nacelle dans le référentiel terrestre ? Exprimer la vitesse puis l'accélération de la nacelle en fonction de $L, d; \alpha$ et ω dans la base cylindrique d'axe $(\mathrm{O}z)$

7 Spirale

Quatre tortues sont au sommet d'un carré $ABCD$ de centre O, tel que $OA = OB = OC = OD = a$. La tortue M_i se dirige constamment vers la tortue M_{i+1} (on pose $M_5 = M_1$), avec une vitesse de norme constante égale à v.

1. Sur un schéma, représentez la position initiale des tortues, puis leurs positions à $t = \Delta t, t = 2\Delta t, \ldots$. Avez-vous une idée de la trajectoire suivie par les tortues ?
2. Quelle remarque peut-on faire sur la symétrie du système à tout instant ?
3. Représentez la position des tortues à un instant quelconque. On repère la tortue M_1 par ses coordonnées polaires r et θ. Représentez et exprimer le vecteur vitesse de M_1 dans cette base.
4. Établir les équations horaires (paramétriques) $r(t)$ et $\theta(t)$, puis l'équation de la trajectoire $r(\theta)$ de M_1.
5. Au bout de combien de temps les tortues se rencontrent-elles ? Où se rencontrent-elles ?
6. Quelle est la distance L parcourue par chaque tortue ?