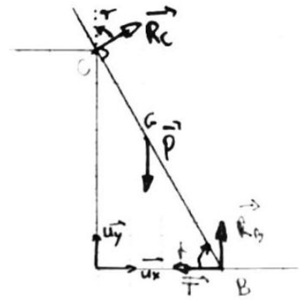
Moment cinétique et applications - Correction

1 Équilibre d'une échelle

1. L'échelle subit la réaction du sol en B et C, la tension du fil attaché en B et son poids.
2. L'écriture du PFD ne permet pas de s'en sortir. Projeté sur les axes (Ox) et (Oy) nous obtenons 4 inconnues pour 2 équations :



$$R_C \sin\alpha = T;$$
$$R_C \cos\alpha + R_B = P$$

Le TMC s'avère utile puisque deux des forces présentes s'appliquent en B : les moments calculés en B associés à ces forces sera nul $\overrightarrow{\mathcal{M}}_T = \overrightarrow{BB} \wedge \vec{T} = \overrightarrow{0}$, de même pour $\vec{R}_B$.
De plus le système est au repos, donc le moment cinétique et sa dérivée sont nuls. Ainsi le TMC calculé en B s'écrit :

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_P + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{R_C} = \overrightarrow{BG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{BC} \wedge \vec{R}_C = \frac{L}{2}\cos\alpha mg\vec{u}_z - LR_C\vec{u}_z \Rightarrow R_C = \frac{mg}{2}\cos\alpha$$

La réaction du sol en C s'écrit donc :

$$\vec{R}_C = \frac{mg}{2}\cos\alpha\left(\sin\alpha\vec{u}_x + \cos\alpha\vec{u}_y\right).$$

3. D'après les relations obtenues grâce au PFD on peut écrire :

$$\vec{T} = -\frac{mg}{2}\cos\alpha\sin\alpha\vec{u}_x; \overrightarrow{R_B} = \left(mg - \frac{mg}{2}\cos^2\alpha\right)\overrightarrow{u_y}$$

2 Mouvement sur un cône

1. Le système est conservatif.
2. On définit le moment cinétique scalaire $\mathcal{L}_{Oz} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_M\right).\vec{u}_z$ avec $\vec{u}_z$ la verticale orientée vers le haut. Étudions les moments des forces en présence :
   - La réaction du support est toujours orthogonale au mouvement, ainsi le moment associé est nul.
   - Le moment associé au poids s'écrit $\overrightarrow{\mathcal{M}}_P = (-mg\vec{u}_z) \wedge m\vec{v}$, par définition ce moment est perpendiculaire à $\vec{u}_z$. Ainsi le TMC projeté sur l'axe vertical s'écrit

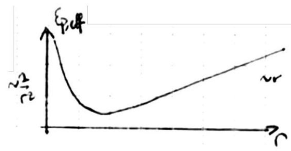
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}}}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}}\vec{u}_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_P\vec{u}_z = 0$$

3. D'après l'équation précédente, le moment cinétique scalaire projeté sur l'axe vertical est constant dans le temps. $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz$. Il faut réexprimer les différentes coordonnées pour ne faire apparaître que la coordonnées radiale :
   - On peut faire disparaître $\dot{\theta}$ en utilisant la conservation du moment cinétique $\mathcal{L}_{Oz} = (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge m\left(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z\right)\vec{u}_z = mr^2\dot{\theta}$.
   - On peut faire disparaître z en utilisant la contrainte géométrique du cône : $r = z\tan\alpha$.

   En utilisant ces relations, l'énergie mécanique devient

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{\mathcal{L}_{Oz}}{mr^2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{r}}{\tan\alpha}\right)^2\right) + mg\frac{r}{\tan\alpha} = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{1}{\tan^2\alpha}\right)\dot{r}^2 + \frac{mg}{\tan\alpha}r + \frac{\mathcal{L}_{Oz}^2}{2mr^2}.$$

4. On peut décrire le problème ici présent comme le mouvement d'un système unidimensionnel (coordonnée r) de masse effective $m_{eff} = m\left(1 + \frac{1}{\tan^2\alpha}\right)$ dans un champ de potentiel effectif $E_{p,eff} = \frac{mg}{\tan\alpha}r + \frac{\mathcal{L}_{Oz}^2}{2mr^2}$.
5. Le potentiel diverge quand quand r tend vers 0 , la bille ne peut atteindre le point O.



3 Effondrement du Soleil

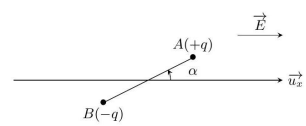
1. Une telle force est associé à un moment nul, ainsi le moment cinétique de ce volume infinitésimal se conserve au cours du temps, il en va donc de même pour l'ensemble du Soleil.
2. Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe s'écrit $\mathcal{L}_\Delta = \overrightarrow{\mathcal{L}} \cdot \vec{u}_\Delta = J_\Delta \omega = J_\Delta \frac{2\pi}{T}$ avec T la période de rotation du solide.
3. Le moment cinétique se conserve, ainsi on peut écrire $J_{\Delta,s}\frac{2\pi}{T_s} = J_{\Delta,NB}\frac{2\pi}{T_{NB}} \Rightarrow T_{NB} = T_s \frac{J_{\Delta,NB}}{J_{\Delta,s}} = T_s \frac{R_{NB}^2}{R_s^2} \simeq 220$ s. Imaginez un astre grand comme la Terre faisant une rotation complète sur lui-même en moins de 4 minutes !

4 Pendule de torsion

1. TMC appliqué à un solide en rotation autour d'un axe fixe (ici z) : $J\ddot{\theta} = -C\theta$.
2. On reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0^2 = \frac{C}{J} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$.
3. Oscillateur harmonique.
4. $P_u = \vec{\Gamma}_e \cdot \vec{\omega} = -C\dot{\theta}\theta$ et $W = \int \delta W = \int P_u \ \mathrm{d}t = -\frac{C}{2}\left(\theta_2^2 - \theta_1^2\right)$.
5. On peut définir $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$ telle que $W = -\Delta E_p$.
6. Système masse/ressort : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$.
7. $\text{TPC} : \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = P_u \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right) = -C\dot{\theta}\theta \Rightarrow J\ddot{\theta} = -C\theta$.

5 Dipôle électrique dans un champ électrique uniforme et stationnaire

1. Soit un dipôle faisant un angle α avec le champ électrique. Les forces sont $\vec{F}_+ = q\vec{E}$ et $\vec{F}_- = -q\vec{E}$, le moment résultant calculé en O est donc :



$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_+ + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_- = -2\frac{d}{2}qE\sin\alpha\vec{u}_z$$

Tandis que la résultante des forces est nulles. Il s'agit donc d'un couple mécanique.

2. Moment dipolaire $\vec{\mu} = \delta e\overrightarrow{BA} = +qd\overrightarrow{e_r}$ alors $\overrightarrow{\mathcal{M}}_0 = -dqE\sin\alpha\vec{u}_z = -\mu E\sin\alpha\vec{u}_z = \vec{\mu} \wedge \vec{E}$

6 Étude d'un moteur

1. Il s'agit d'un couple résistant, alors $\alpha > 0$.
2. TMC appliqué à un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe : $\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = J\dot{\omega} = -\alpha\omega$.
3. On a une EDL1 qui admet comme solution $\omega(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{J}{\alpha}$. Les conditions initiales donnent $A = \Omega_0$. Si J augmente alors le temps caractéristique augmente (l'inertie s'oppose à l'arrêt du mouvement) ; si α augmente alors le temps caractéristique diminue (le frottement s'oppose au mouvement).
4. De même on trouve $\dot{\omega} = -\frac{\alpha}{J}\omega + \frac{\Gamma_m}{J}$.
5. Résolution de l'EDL1 $\ldots \omega(t) = \frac{\Gamma_m}{\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ avec $\tau = \frac{J}{\alpha}$.
6. $\frac{\Omega_f - \omega(t_5)}{\Omega_f} \leq 5/100 \Rightarrow \ldots \Rightarrow t_5 \geq -\frac{J}{\alpha}\ln\left(5 \times 10^{-2}\right)$.
7. Le régime transitoire a un temps caractéristique identique aux situations précédente $\tau = \frac{J}{\alpha}$.

8. L'EDL1 devient ici $\dot{\omega} + \frac{\alpha}{J}\omega = \frac{\Gamma_0}{J}(1 + r\cos(\Omega t))$. On injecte (en passant au complexe) l'expression de la vitesse de rotation $\underline{\omega} = \omega_f + A e^{j(\Omega t - \phi)} = \omega_f + \underline{A} e^{j\Omega t}$ pour un forçage $\Gamma_0 + \Gamma_0 r e^{j\Omega t}$, sachant que ω_f vérifie l'équation à forçage constante. Alors il reste

$$\underline{A}\left(j\Omega + \frac{1}{\tau}\right) = \frac{\Gamma_0}{J} r = \frac{\Omega_f}{\tau} r \Rightarrow \underline{A} = \frac{r\Omega_f}{1 + j\Omega\tau}.$$

Alors $A = |\underline{A}| = \frac{r\Omega_f}{\sqrt{1+\Omega^2\tau^2}}$ et $\phi = \arg(\underline{A}) = -\arg(1 + j\Omega\tau)$ donc $\tan\phi = -\Omega\tau$.

9. Un volant d'inertie augmente J donc augmente τ (ce n'est pas ce qui nous intéresse) mais diminue A l'amplitude des vibrations.

7 Allongement de la durée du jour

1. $\mathcal{L}_T = J_T\omega_T = \frac{2}{5} M_T R_T^2 \omega_T$ et $\mathcal{L}_L = J_L\omega_L = \frac{2}{5} M_L R_L^2 \omega_L$
2. $\vec{\mathcal{L}}_{\text{orb}} = d_{TL}\vec{e_r} \wedge M_L\left(d_{TL}\omega_{orb}\right)\vec{e_\theta} = M_L d_{TL}^2 \omega_{orb}\vec{e}_z$
3. 3ème loi de Kepler appliqué au mouvement circulaire de la Lune $\frac{d_{TL}^3}{T_{orb}^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}$. Alors $\mathcal{L}_{\text{orb}} = M_L d_{TL}^2 \frac{2\pi}{T_{\text{orb}}} = 2\pi M_L d_{TL}\sqrt{\frac{GM_T}{4\pi^2 d_{TL}^3}} = M_L\sqrt{GM_T d_{TL}}$.
4. $\mathcal{L}_T \simeq 7 \times 10^{33}$ kg m^2 s^{-1}, $\mathcal{L}_L \simeq 2 \times 10^{29}$ kg m^2 s$^{-1} \ll \mathcal{L}_T$ et $\mathcal{L}_{\text{orb}} \simeq 3 \times 10^{34}$ kg m^2 s^{-1}.
5. On suppose le système Terre-Lune isolé, ainsi les seules forces présentes sont des forces intérieurs, on montre aisément que le moment associé est donc nul.
6. $0 = \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{2}{5} M_T R_T^2 \frac{\mathrm{d}\omega_T}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2} M_L \sqrt{\frac{GM_T}{d_{TL}}}\frac{\mathrm{d}d_{TL}}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{5} M_T R_T^2 \frac{\Delta\omega_T}{\Delta t} + \frac{M_L}{2}\sqrt{\frac{GM_T}{d_{TL}}}\frac{\Delta d_{TL}}{\Delta t}$. Or $\Delta\omega_T = \Delta\frac{2\pi}{T_T} = -\frac{2\pi\Delta T_T}{T_T^2}$. Donc pour $\Delta t = 1 \times 100 \times 365 \times 24 \times 3600$ s et $\Delta d_{TL} = 3.7$ m on trouve

$$\Delta T_T = \frac{5}{8\pi}\frac{M_L T_T^2}{R_T^2}\sqrt{\frac{G}{d_{TL} M_T}}\Delta d_{TL} \simeq 1.6 \text{ ms}$$

8 Chute d'un arbre

1. TMC appliqué à un solide en rotation autour d'un axe fixe, ici l'axe de rotation passe par la base de l'arbre,

$$J\dot{\omega} = \vec{\Gamma_p}\vec{u_\Delta}$$

Calculons le moment associé au poids de l'arbre en O,

$$\vec{\Gamma_p} = \vec{OM} \wedge \vec{P} = \frac{L}{2}\vec{e_r} \wedge mg\left(-\cos\theta\vec{e_r} + \sin\theta\vec{e_\theta}\right) = \frac{L}{2} mg\sin\theta\vec{u_\Delta}$$

Alors le TMC s'écrit

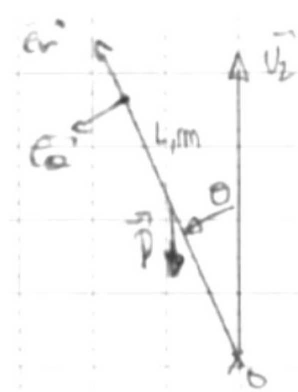
$$\ddot{\theta} = \frac{Lm}{2J} g\sin\theta = \frac{3}{2L} g\sin\theta$$

2. Multiplions la relation précédente par $\dot{\theta}$ et intégrons, on obtient

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{3}{2L} g\cos\theta + A$$

Initialement $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = \theta_0$ alors on a $A = -\frac{3}{2L} g\cos\theta_0$, ainsi

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)}.$$



3. La dérivée peut s'écrire $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ alors la relation précédente devient

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)} \Rightarrow \sqrt{\frac{3g}{L}}\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$$

4. Le temps de chute correspond au temps pour passer de la position θ_0 à $\theta = \pi/2$, ainsi

$$\sqrt{\frac{3g}{L}}T = \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} \Rightarrow T \simeq 5.15\ \mathrm{s}$$

9 Mesure d'un couple par oscillations

1. Le disque, de moment cinétique par rapport à (Oz) s'exprimant $J_0\dot{\theta}$, est soumis à l'action de son poids de moment nul par rapport à l'axe (Oz), et au couple de torsion du fil $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{u}_z$. L'application au disque du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) amène à : $J_0\ddot{\theta} = -C\theta$. C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_0}}$ et de période $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{C}}$.
2. On reprend la même méthode, avec comme système l'ensemble { disque + surcharge }. Le poids de la surcharge étant parallèle à (Oz), son moment par rapport à (Oz) est nul et la loi du moment cinétique à ce système par rapport à l'axe Oz s'écrit : $(J_0 + J_1)\,\ddot{\theta} = -C\theta$. On obtient la nouvelle période des oscillations : $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0+J_1}{C}}$
3. $J_0 = C\frac{T_0^2}{4\pi^2}$ et $J_0 + J_1 = C\frac{T_1^2}{4\pi^2}$. En faisant la différence entre ces deux équations, on aboutit à $J_1 = \frac{C}{4\pi^2}\left(T_1^2 - T_0^2\right)$, soit $C = \frac{4\pi^2 J_1}{T_1^2 - T_0^2}$
4. $C = 0,21\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{rad}^{-1}$.

10 Expérience de Cavendish

1. On note (Oz) l'axe vertical ascendant. Chacune des deux sphères étant en mouvement de rotation de rayon $l/2$ autour de (Oz) à la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et la masse de la tige étant négligée, le moment cinétique total de l'ensemble {tige+deux sphères} par rapport à (Oz) est $L_{Oz} = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}$. Ce système est soumis à l'action de son poids et de la tension du fil, dont les moments par rapport à (Gz) sont nuls, et au couple de torsion $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{u}_z$. L'application de la loi du moment cinétique à ce système par rapport à (Gz) conduit à $\frac{ml^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta$, soit $\ddot{\theta} + \frac{2C}{ml^2}\theta = 0$. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{ml^2}}$.
2. $C = \frac{2\pi^2 ml^2}{T_0^2} = 2,6 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{rad}^{-1}$.
3. On se place dans le système de coordonnées polaires, de base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ pour chacune des deux sphères, et on estime que la distance entre une des sphères et la boule correspondante est $r - \frac{l}{2}\sin(\theta) \approx r - \frac{l}{2}\theta$. On néglige aussi l'action de la boule la plus éloignée. On suppose de plus que la force de gravitation exercée par la boule sur la sphère est portée par $\vec{u}_\theta$ pour les faibles angles : $\vec{F}_g = \frac{GMm}{\left(r-\frac{l}{2}\theta\right)^2}\vec{u}_\theta \approx \frac{GMm}{r^2}\left(1 + \frac{l}{r}\theta\right)\vec{u}_\theta$. Le moment de cette force par rapport à (Oz) est ainsi $\mathscr{M}_{Oz}\left(\vec{F}_g\right) = \frac{GMml}{2r^2}\left(1 + \frac{l}{r}\theta\right)$, et le moment total par rapport à (Oz) des deux forces gravitationnelles s'exerçant sur le système { tige+deux sphères } s'écrit $\mathscr{M}_{Oz} = \frac{GMml}{r^2}\left(1 + \frac{l}{r}\theta\right)$.
   On applique alors la loi du moment cinétique par rapport à (Oz) au système :
   $\frac{ml^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta + \frac{GMml}{r^2}\left(1 + \frac{l}{r}\theta\right)$. À l'équilibre, on obtient $\theta_{eq} = \frac{GMmlr}{Cr^3 - GMml^2}$.
4. $\theta_{eq} = 1,4\cdot 10^{-3}\mathrm{rad}$: Cavendish avait donc développé une méthode de mesure d'angle avec une précision inférieure au milliradian.