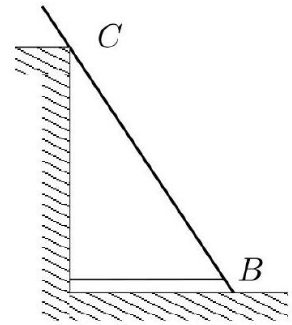
Moment cinétique et applications

1 Équilibre d'une échelle

Une échelle de masse m et de longueur $BC = L$ est posée contre un mur. Un fil inextensible maintient, au point B, son extrémité inférieure (on confond B avec le point de contact de l'échelle sur le sol, et le point C avec le point de contact de l'échelle sur le coin du mur). On note α l'angle entre l'échelle et le sol et on néglige tous les frottements : la réaction du support est normale à l'échelle en C et normale au sol en B.



1. Détailler les forces subies par l'échelle. Préciser graphiquement leur sens et leur direction.
2. Quelle loi de la mécanique permet d'obtenir facilement l'expression de la réaction $\vec{R}_C$ du mur au point C. La donner en fonction de α, m et g.
3. En déduire la tension $\vec{T}$ du fil et la réaction $\vec{R}_B$ du sol sur l'échelle au point B.

2 Mouvement sur un cône

Une bille supposée ponctuelle de masse m glisse sans frottement à l'intérieur d'un cône de demi-angle α et d'axe Oz. La bille est lancée à une altitude h (repérée par rapport au sommet du cône O) avec une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale. On utilisera les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z).

1. Montrer que l'énergie mécanique se conserve.
2. Montrer qu'il en est de même pour le moment cinétique scalaire L_{Oz}.
3. Écrire l'énergie mécanique sous forme d'une fonction uniquement de $\dot{\rho}$ et ρ.
4. Montrer que ce problème est équivalent à un problème (dit effectif) unidimensionnel. Quelles sont la masse effective m_{eff} et l'énergie potentielle effectives $\mathcal{E}_{p\ \text{eff}}\,(r)$?
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{E}_{\text{peff}}\,(r)$. En déduire le mouvement ultérieur de la bille. Peut-elle atteindre le point O ?

3 Effondrement du Soleil

À la fin de sa vie, dans 5 milliards d'années environ, le Soleil s'effondrera en une naine blanche, un astre de forte densité, concentrant la masse du Soleil sur une boule de rayon équivalent au rayon terrestre. Le Soleil est un système dit autogravitant, il exerce une force d'interaction gravitationnelle sur lui même. Pour être précis un élément de volume élémentaire subi une attraction de la part de la partie centrale du Soleil. C'est une force dont la résultante est orientée vers le centre du Soleil (i.e. un force centrale). On rappelle que le moment d'inertie d'une boule homogène de masse m et de rayon R est $J_\Delta = \frac{2}{5} m R^2$.

1. On suppose que cette effondrement se fait sans perte significative de masse. Justifier que le moment cinétique scalaire du Soleil par rapport à son axe de rotation reste constant au cours de l'effondrement.
2. Exprimer les moments cinétiques scalaires du Soleil, et de la naine blanche, en fonction de leur masse $M_s = 2.10^{30}$ kg, de leur périodes de rotation $T_s = 1$ mois et T_{NB}, et de leur rayons $R_s = 7.10^5$ km et $R_{NB} \approx R_T = 6400$ km.
3. Déterminer la période de rotation de la naine blanche.

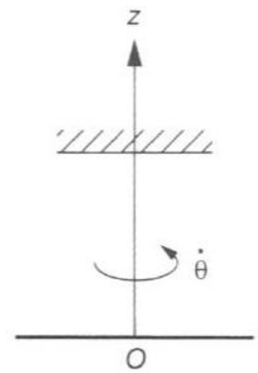
4 Dipôle électrique dans un champ électrique uniforme et stationnaire

Un dipôle électrique est un système composé de 2 charges électriques A et B, de charges respectives $+q$ et $-q$, séparées d'une distance d. On place ce dipôle dans un champ électrique $\vec{E} = E_0 \overrightarrow{u_x}$ stationnaire et uniforme.

1. Déterminer le moment de la force de Lorentz s'appliquant au dipôle, calculé au centre de celui-ci. Déterminer la résultante de la force de Lorentz s'appliquant à ce dipôle. Conclure sur le type d'action mécanique qu'exerce le champ électrique sur le dipôle.
2. Rappeler la définition du moment dipolaire. Exprimer le moment de la force de Lorentz s'appliquant au dipôle, calculé au centre de celui-ci, en fonction du moment dipolaire.

5 Pendule de torsion

Lors de ses expériences d'électrostatique, qui lui permirent d'en déduire l'expression de l'interaction électrostatique, Coulomb utilisait des pendules de torsion. Une pendule de torsion est constitué d'une tige homogène fixé en son milieu à une ficelle. On fait tourner le bâton sur lui même d'un angle θ afin de tordre la ficelle. Celle-ci exerce alors un couple de rappel élastique proportionnel à l'angle θ : $\vec{\Gamma}_e = -C\theta\vec{u_z}$.



1. À l'instant initial, on écarte le pendule d'un angle θ_0. Déterminer, à l'aide du théorème du moment cinétique, l'équation différentielle du mouvement.
2. Déterminer la période d'oscillation du pendule.
3. Faire une analogie avec un problème déjà traité.
4. Calculer la puissance P_u du couple de torsion, ainsi que le travail W du couple entre les angles θ_1 et θ_2.
5. Montrer qu'il est possible de définir une énergie potentielle de torsion associée à ce couple. L'exprimer.
6. Poursuivre l'analogie.
7. En appliquant le théorème de la puissance mécanique, retrouver l'équation du mouvement du pendule de torsion.

6 Étude d'un moteur

Dans une machine tournante, la partie mobile, qui possède un moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation, est soumise à un couple moteur Γ_m constant, ainsi qu'à un couple de frottements visqueux $\Gamma_f = -\alpha\omega$, où α est la constante de frottement et ω la vitesse de rotation du moteur.

1. Préciser le signe de la constante α.

6.1 Arrêt à couple nul

Le moteur tournant à une vitesse angulaire Ω_0, le couple moteur cesse de s'exercer.

2. Établir l'équation différentielle d'évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$.
3. Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse angulaire $\omega(t)$ et proposer un temps caractéristique d'évolution τ. Commenter sa dépendance par rapport à J et α.

6.2 Démarrage

Le rotor est initialement immobile. Le couple moteur constant est appliqué.

4. Établir l'équation différentielle d'évolution de la vitesse angulaire.
5. Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse angulaire $\omega(t)$.
6. Quelle durée doit-on attendre pour observer une vitesse ne différant pas de la vitesse finale de plus de 5% ?

6.3 Perturbations

En fait, suite à des vibrations du dispositif, le couple moteur varie comme $\Gamma_0(1 + r\cos\Omega t))$, où r est liée à l'intensité de la perturbation et Ω est sa pulsation. On cherche, après la fin du régime transitoire, une évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$ sous la forme $\omega(t) = \omega_f + A\cos(\Omega t - \phi)$ où A et ϕ sont des constantes.

7. Quelle est la durée du régime transitoire ?
8. Exprimer A et $\tan\phi$ en fonction de r, Ω, τ et ω_f. On pourra utiliser la notation complexe.
9. Expliquer pourquoi, afin de régulariser le fonctionnement du rotor, on lui fixe un anneau de masse assez importante et grand rayon, appelé volant d'inertie. Quelles sont les limites de cette méthode ?

7 Allongement de la durée du jour

Un réseau mondial de stations d'observations de la Lune effectue régulièrement des tirs laser sur des réflecteurs déposés sur la surface de la lune au cours des missions américaines et soviétiques. Le temps d'aller et retour des signaux laser entre la Lune et la Terre et son évolution systématique ont ainsi permis d'établir que la Lune s'éloigne de la Terre de 3,7cm par an. Cet éloignement de la Lune est en fait la traduction d'une dissipation d'énergie du système Terre-Lune associée au phénomène des marées. La conséquence est un allongement de la durée du jour sur Terre.

1. Déterminer le moment cinétique scalaire de la Terre L_T et de la Lune L_L. On donne : le moment d'inertie d'une boule homogène de rayon R et de masse m autour de son axe de rotation vaut $J_\Delta = \frac{2}{5}mR^2$.
2. Déterminer le moment cinétique scalaire de la Lune en révolution autour de la Terre L_{orb} . Mouvement supposé circulaire et uniforme.
3. En appliquant la 3e loi de Kepler, montrer que $L_{\text{orbite } L} = M_L\sqrt{GM_T d_{TL}}$.
4. Évaluer numériquement ces trois moments. En déduire lequel des trois termes est négligeable.
5. Montrer que le moment cinétique total du système Terre-Lune se conserve dans le temps.
6. En dérivant le théorème du moment cinétique, déterminer l'allongement de la durée du jour sur 1 siècle.

Données : $M_T = 6,0.10^{24}$ kg, $R_T = 6,4.10^3$ km, $M_L = 7,3.10^{22}$ kg, $R_L = 1,7.10^3$ km, $\mathrm{d}_{TL} = 3,8.10^5$ km, $T_L = 28$j.

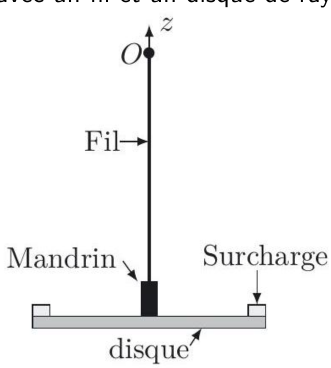
8 Chute d'un arbre

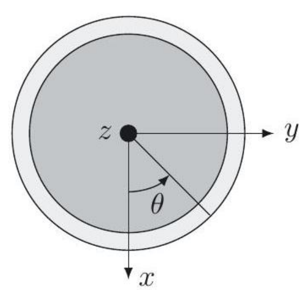
On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas, et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité : $J = m\frac{L^2}{3}$.

1. Établir l'équation du mouvement de la chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut : $\dot\theta = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(\cos(\theta_0) - \cos(\theta)\right)}$.
3. Monter que cette relation peut être réécrite : $\sqrt{\frac{3g}{L}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}\mathrm{d}\theta$.
4. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10.\mathrm{s}^{-2}$. On donne pour $\theta_0 = 5°$: $\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5,1$.

9 Mesure d'un couple par oscillations

On réalise un pendule de torsion avec un fil et un disque de rayon $R = 10$ cm sur lequel est fixé un mandrin. Le fil est attaché en O.





La rotation du disque autour de l'axe Oz est repérée par l'angle θ indiqué sur la vue de dessus de la figure de gauche. Sollicité en torsion, le fil exerce un couple de rappel de moment $\vec\Gamma = -C\theta\vec{u}_z$. Nous négligeons tout frottement et cherchons à déterminer la constante de torsion C.

Le calcul précis du moment d'inertie J_0 par rapport à l'axe de rotation du solide constitué par le cylindre et le mandrin n'étant pas possible, on utilise la méthode de la surcharge qui consiste à placer sur le disque un anneau de moment d'inertie $J_1 = 1,0 \cdot 10^{-2}$ kg $\cdot$ m^2 par rapport à l'axe de rotation.

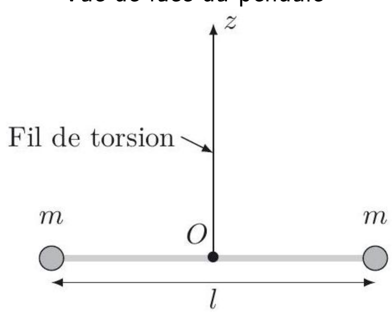
1. Déterminer la période T_0 des oscillations du pendule en l'absence de la surcharge.
2. Déterminer la période T_1 des oscillations du pendule avec la surcharge.

3. Montrer qu'il est possible de déterminer C sans connaître le moment d'inertie J_0.
4. Les mesures donnent $T_0 = 1,0$ s et $T_1 = 1,7$ s. Déterminer C.

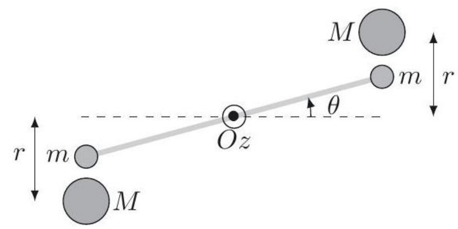
10 Expérience de Cavendish

L'expérience réalisée par Cavendish en 1789 a permis à ce dernier d'obtenir une valeur remarquable de la constante de gravitation universelle G. Décrivons sommairement le dispositif.
Deux petites sphères de masse $m = 0,72$ kg sont fixées aux extrémités d'une tige de masse négligeable, rigide, de longueur $l = 180$ cm et suspendue horizontalement, en son milieu, à un fil de torsion vertical et très fin de constante de torsion C. Si la tige tourne d'un angle θ par rapport à sa position d'équilibre $\theta = 0$, le fil exerce ainsi le couple de rappel $-C\theta\vec{u}_z$ sur la tige.
Deux boules de plomb de masse $M = 160$ kg sont fixées, l'une derrière et l'autre devant chaque petite sphère, à une distance $r = 20$ cm définie sur le schéma ci-dessous. Les deux forces d'attraction gravitationnelle produisent un couple qui fait tourner la tige d'un angle θ par rapport à sa position au repos. Les 2 petites sphères se rapprochent ainsi des boules de plomb jusqu'à ce que la torsion du fil s'équilibre avec le couple gravitationnel.

Vue de face du pendule



Vue de dessus avec les boules de plomb



Nous cherchons dans un premier temps à déterminer la constante de torsion C du pendule en faisant osciller celui-ci. Les boules en plomb ne sont pas encore présentes.

1. Montrer à l'aide de la loi du moment cinétique que l'oscillateur est harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{ml^2}}$.
2. La mesure de la période T_0 des oscillations donne $T_0 = 7,0$ min. En déduire la valeur de C.
3. Les boules étant placées, déterminer l'expression de la déviation angulaire θ par rapport à la position d'équilibre. On supposera que θ est extrêmement faible pour évaluer le couple exercé par les deux boules de plomb.
4. La valeur obtenue par Cavendish à l'aide de ce dispositif est $G = 6,75 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot En^2}$ déduire la déviation angulaire θ et commenter.

Sources :
ex 1 à 7 : ?
ex 9 et 10 : Inspiré de Physique-Chimie MPSI by Bauduin Jean-Michel, Bars Thierry, Cousin Mélanie