Chapitre

4 Propagation d'un signal et interférences

1 Introduction

Un signal est une variation temporelle d'une grandeur physique portant une information. On peut citer (liste non exhaustive) :

- ☆ Les signaux sonores, constitués par les vibrations d'un milieu matériel.
- ☆ Les signaux de communication (téléphones portables, satellites, fibres optiques), qui sont portés par les ondes électromagnétiques.
- ☆ Les signaux de distorsion spatiale, qui permettent de détecter la fusion d'objets denses comme les trous noirs, qui sont portés par les ondes gravitationnelles.

Pour bien traiter cette information, le physicien a recourt à des méthodes de traitement du signal, dont nous allons voir un des éléments clefs à savoir la représentation fréquentielle. Une compréhension plus large sur la propagation et la superposition de signaux nous sera nécessaire pour bien comprendre cette notion.

2 Récupérer un signal et l'analyser

2.1 Récupérer un signal

Il existe plusieurs variétés de signaux, chacun conduit à une variation temporelle d'une certaine grandeur physique. Voici quelques exemples de grandeurs physiques qui peuvent être utilisées pour récupérer un signal :

	Ordre de grandeur de la fréquence du signal	Grandeur physique variant dans le temps
Signaux acoustiques audibles	20 Hz - 20kHz	Surpression, vitesse locale
Onde dans une corde (piano, guitare,...)	20 Hz - 20kHz	tension, déplacement local
Transport energie electrique HT (France)	50 Hz	Intensité, tension
Téléphonie mobile	$\simeq$ 1 GHz	Intensité, tension (antenne)
Ondes lumineuses visibles	$\simeq 10^{14}$ Hz	E, B

Ainsi, pour récupérer un signal, on utilisera des appareils de mesure sensibles aux variations de la grandeur physique associée. Pour une surpression acoustique, on pourra utiliser un micro : la fine membrane est sensible aux variations de pression et est reliée à un système permettant de convertir son mouvement en courant électrique, qui sera récupérable et analysable.

2.2 Signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal correspond à un signal temporel de la forme :

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

où ω représente la pulsation du signal, A l'amplitude du signal et φ la phase à l'origine du temps.
Il se peut que le signal sinusoïdal observé comporte un décalage(régulièrement appelé "offset" d'après la traduction anglaise) :

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + s_0.$$

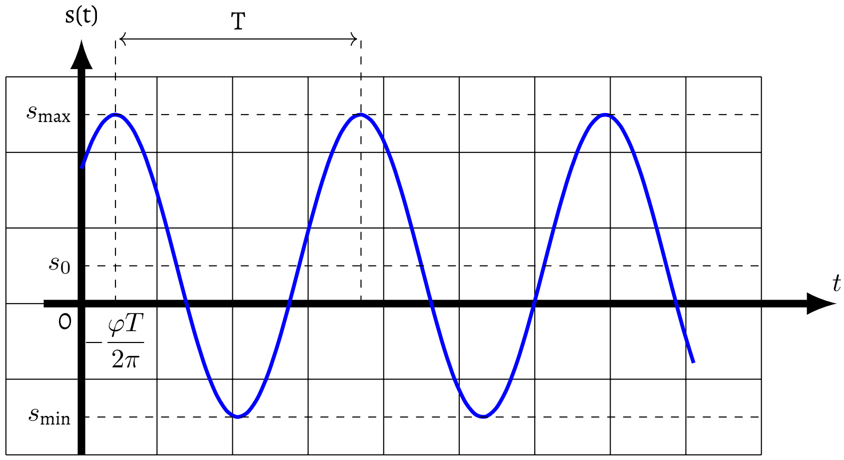
La pulsation ω est liée à la fréquence f et à la période temporelle T du signal par :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Lecture d'un chronogramme

Nous sommes très souvent amenés à exploiter l'acquisition temporelle d'un signal sinusoïdal. On appelle chronogramme une acquisition temporelle, et oscillogramme un chronogramme obtenue à partir d'un oscilloscope.

Lecture d'une période, d'une amplitude, d'une phase à l'origine :
La valeur $s_{\text{max}} - s_{\text{min}}$ est appelée **amplitude crête à crête**. Elle est égale au double de l'amplitude A.
La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal décalé s(t) est notée $\langle s\rangle$ et est égal à $\frac{s_{\text{max}} + s_{\text{min}}}{2}$, soit la valeur du décalage s_0.
La phase à l'origine des temps peut se lire sur le graphique. On cherche la valeur de t pour laquelle $s(t)$ est maximale. Notons t_{max} cette valeur. Or $s(t)$ atteint son maximum lorsque $\cos(\omega t + \varphi)$ atteint son maximum, soit pour t vérifiant $\omega t + \varphi = 0$ en prenant le maximum le plus proche de l'origine. On trouve ainsi $t_{\text{max}} = -\frac{\varphi}{\omega}$ ou bien $t_{\text{max}} = -\frac{\varphi T}{2\pi}$.



Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux : Soit deux signaux sinusoïdaux de même période :

$$s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + s_{01}, \quad s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) + s_{02}.$$

Voici le vocabulaire associé à la comparaison entre deux signaux sinusoïdaux :

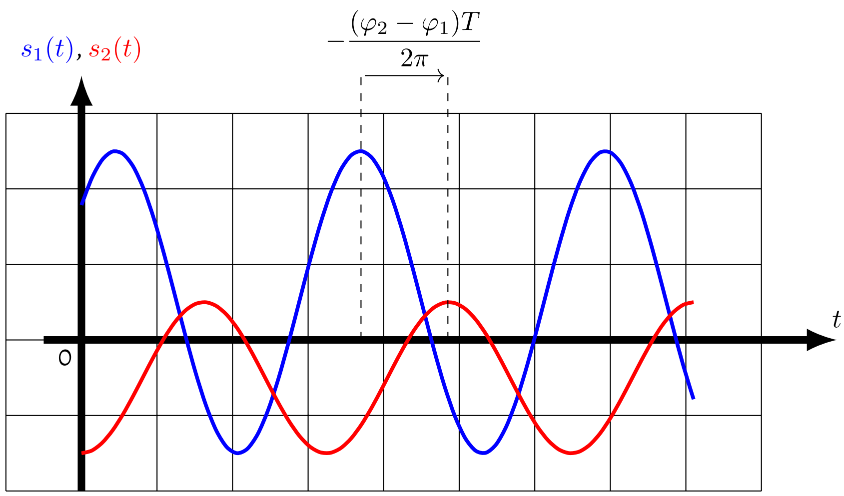
— Lorsque la phase à l'origine du signal 2 est plus grande que celle du signal 1, le signal 2 est dit **en retard** par rapport au signal 1.

— Il est **en avance** dans le cas contraire.

— Pour deux signaux **en phase**, le retard est nul ($\varphi_1 = \varphi_2$).

— Le retard vaut une demie période temporelle pour deux signaux en opposition de phase ($\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$).

— Le déphasage du signal 2 par rapport au signal 1 est égal à la **différence** de phase $\varphi_2 - \varphi_1$, et souvent noté $\Delta\varphi$.



Somme de deux signaux sinusoïdaux

La somme de deux ondes de même pulsation conduit à l'apparition d'interférences. La somme des signaux $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ donne un signal sinusoïdal de même pulsation dont l'amplitude dépend du déphasage $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$. Il existe deux cas particuliers :

— Les deux signaux sont en phase, c'est à dire $\Delta\varphi \equiv 0[2\pi]$, l'amplitude du signal est maximale et correspond à $A_0 + A_1$. On parle d'interférences constructives.

— Les deux signaux sont en opposition de phase, c'est à dire $\Delta\varphi \equiv \pi[2\pi]$, l'amplitude du signal est minimale et correspond à $|A_0 - A_1|$. On parle d'interférences destructives.

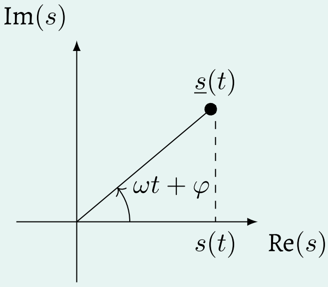
Représentation complexe d'un signal sinusoïdal (complément de cours)

Convention 1 - Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

On fait correspondre à un signal sinusoïdal, $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, la grandeur complexe :

$$\underline{s}(t) = A\mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{A}\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{2.1}$$

où $\underline{A}$ est l'amplitude complexe. L'amplitude du signal correspond donc à $|\underline{A}|$ et la phase à l'origine $\varphi = \arg(\underline{A})$.
Dans le plan complexe (voir figure), le signal $\underline{s}(t)$ est représenté par un segment de longueur A, et d'angle par rapport à l'axe des abscisses $\omega t + \varphi$. La projection de ce segment sur l'axe des abscisses correspond à la partie réelle du signal complexe donc $s(t)$. Seule la partie réelle de la représentation complexe du signal à un sens physique.



Remarque : La représentation dans le plan complexe est similaire à une représentation dite de Fresnel (programme de MPSI). La différence est que la représentation est algébrique dans le premier cas, géométrique dans le second.

Convention 2 - addition de signaux sinusoïdaux dans le plan complexe

On représente $s(t)$ la somme de deux signaux sinusoïdaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ dans le plan complexe par la mise bout à bout des segments représentants $s_1(t)$ et $s_2(t)$. La longueur du segment formée par le début du premier segment et la fin du deuxième segment correspond à l'amplitude complexe du signal $s(t)$.

Exercice 4.1

Représenter le signal $s_1(t) = -A\sin(\omega t)$ dans le plan complexe. On ajoute le signal $s_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. Représenter la somme des deux signaux $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ pour φ quelconque. Représenter les cas $\varphi = 0$, $\varphi = -\pi/2$ et $\varphi = \pi/2$. Dans chaque cas, déterminer l'amplitude et la phase du signal $s(t)$ graphiquement puis retrouver ces résultats via les formules trigonométriques.

2.3 Etude d'un signal périodique

Valeur moyenne et efficace d'un signal périodique

Une fois un signal $s(t)$ enregistré, il peut être étudié de plusieurs manières. Si le signal est périodique, il est utile d'introduire les définitions et propriétés suivantes :

Définition 1 - Valeur moyenne et valeur efficace d'un signal périodique

Pour un signal périodique $s(t)$ de période T, on définit :

Sa valeur moyenne	Sa valeur efficace
$\langle s\rangle = \dfrac{1}{T}\int_0^T s(t)\ \mathrm{d}t$	$\sqrt{\langle s^2\rangle} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\ \mathrm{d}t}$

où les intégrales portent sur n'importe quel intervalle de longueur T.

Exemple

Pour un signal sinusoïdal de période T s'exprimant $s(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, on peut calculer :

$$\begin{aligned}\langle s\rangle &= \frac{A}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{A}{T}\left[-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^T \\ &= 0\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}\sqrt{\langle s^2\rangle} &= \sqrt{\frac{A}{2T}\int_0^T 1-\cos\left(2\times\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t} \\ &= \sqrt{\frac{A}{2T}\left[t-\frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\right]_0^T} \\ &= \frac{A}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

≀

Exercice 4.2

Calculer la valeur efficace d'un signal créneau et d'un signal triangulaire d'amplitude A et de période T et de moyenne nulle.

Décomposition en série de Fourier (complément de cours)

Propriété 1 - Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique

Un signal [a] périodique $s(t)$ de période T est décomposable en une série de Fourier :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) \tag{2.2}$$

avec $a_0/2$ la valeur moyenne du signal, $\omega = 2\pi/T$ et les coefficients de Fourier, définis par :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

a. Théoriquement, une condition suffisante pour appliquer la DSF est que le signal soit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Remarques :

1. **La connaissance de la formule de la décomposition de Fourier est hors programme** mais la connaissance de son existence et de son utilisation l'est (vous devez savoir l'utiliser quand elle est fournie en TP, en DS, etc.).
2. La propriété (2.2) est remarquable et sa réciproque aussi : une somme de sinusoïdes de pulsation multiple de $2\pi/T$ peut créer un signal périodique de période T.

Exercice 4.3

On peut montrer qu'un signal adimensionné, périodique et triangulaire de période T, égal à 1 en t=0, de moyenne nulle, et d'amplitude unité se décompose en une série de cosinus :

$$s(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)\omega t)}{(2n+1)^2}.$$

Faire un schéma du signal triangulaire attendu. À partir de la formule (2.2), déterminer les coefficients de Fourier a_n et b_n de ce signal. Que représente n ? Que peut-on remarquer de la relation de ces coefficients avec n. Tracer sur sa calculette la somme des unes, puis deux, puis trois premières harmoniques.

Pour la décomposition en série de Fourier d'un signal carré ou triangulaire, cliquer ici et là.

Exercice 4.4

Montrer que l'écriture de la décomposition d'un signal en une série de Fourier peut aussi s'écrire :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

Après les avoir nommés, exprimer les coefficients c_n et φ_n en fonction des a_n et b_n.

Remarque : Un signal périodique peut donc être traité comme la somme de signaux sinusoïdaux. Si le milieu par lequel est transmis ce signal est linéaire, alors la transmission peut être étudiée pour chaque signal : la reconstitution du signal de sortie du milieu par série de Fourier inverse permet de conduire au signal d'origine. Si le système est non linéaire il faudra alors faire dans la plupart des cas une simulation plutôt que d'utiliser une décomposition en série de Fourier.

3 Applications aux ondes progressives

Définition 2 - Onde progressive

Une onde est une oscillation qui se propage de proche en proche, dans un milieu matériel ou dans le vide. Pour un milieu matériel (air, eau, etc.) il s'agit de l'oscillation autour de sa position d'équilibre de la matière qui constitue le milieu. L'onde est associée à un transport d'énergie et de quantité de mouvement lorsqu'elle est progressive.

Définition 3 - Onde transversale et onde longitudinale

Une onde transversale est une onde dans laquelle les quantités qui varient au passage de l'onde sont décrites par des vecteurs orthogonaux à la direction de propagation. Les vecteurs sont colinéaires à la direction de propagation pour une onde longitudinale.

Exemple

Les ondes sismiques se divisent en deux types, les ondes P (qui arrivent en **p**remier) sont des ondes de compression (longitudinales). Les ondes S (qui arrivent en **s**econd) sont des ondes de cisaillement (transversales). Les liquides et les gaz sont dépourvus de ce dernier type d'onde.

Dans la suite, on va se restreindre à la propagation d'un signal à une dimension, sans déformation ni atténuation et à vitesse constante.

3.1 Vitesse de propagation et écriture mathématique d'une onde progressive

Définition 4 - Célérité

La célérité est un terme utilisé pour désigner la vitesse de propagation d'une onde, contrairement au terme vitesse qui désigne le plus souvent un déplacement de matière. Elle est appelée vitesse de phase dans le cas d'une onde sinusoïdale.

Définition 5 - Milieu dispersif

Milieu dans lequel la vitesse de phase de l'onde dépend de sa longueur d'onde.

Exemple

Le prisme optique met en évidence le phénomène dispersion. La lumière blanche étant composée de plusieurs ondes de fréquences différentes, un milieu dispersif va imposer des vitesses de phase différentes à celles-ci, permettant de les séparer spatialement. En effet, l'angle de réfraction sur les deux surfaces du prisme traversées par ses ondes seront dépendant de la dispersion du milieu. La loi de Cauchy permet de modéliser cette dispersion en fonction de la longueur d'onde :

$$n(\lambda) \simeq n_0 + \frac{\sigma}{\lambda^2}$$

avec n_0 constante proche de l'indice du prisme et σ une constante ($\sigma \simeq 1 \times 10^3\ \mathrm{nm}^2$ pour un prisme optique).
Les phénomènes d'aberration chromatique pour les lentilles ou le phénomène de vagues déferlantes correspondent aussi à des phénomènes liés à la dispersion.
Un lien vers deux ondes ne se propageant pas à la même vitesse : ici

Propriété 2

Pour un signal se propageant à une dimension d'un point A vers un point B pendant une durée Δt, sans déformation ni atténuation et dans un milieu homogène, la célérité de l'onde est donnée par

$$c = \frac{[AB]}{\Delta t}$$

Propriété 3 - Ecriture mathématique d'une onde progressive à une dimension

Une onde progressive à une dimension peut s'écrire mathématiquement comme une fonction de deux variables, une de position et une de temps :

$$s(x,t),$$

où $s(x,t)$ représente l'amplitude de l'onde à la position x et à l'instant t.

Pour bien comprendre cette fonction à deux variables nous allons la représenter de deux manières différentes.

3.2 Expression temporelle de la propagation d'une onde

Théorème 1 - Expression temporelle d'une onde progressive

Une onde progressive se propageant à une célérité c dans la direction de l'axe (O_x), sans atténuation ni déformation, peut être mise sous la forme mathématique suivante :

$$s(x,t) = f\left(t \pm \frac{x}{c}\right), \tag{3.1}$$

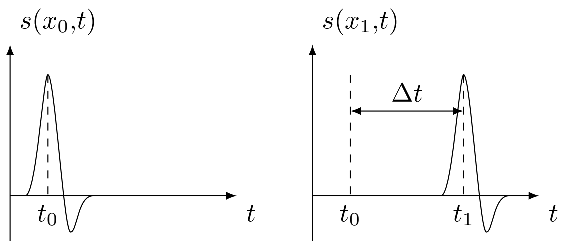
où f est fonction d'une unique variable homogène à un temps et où le signe - (resp. +) correspond à une propagation suivant le sens positif (resp. négatif) de l'axe (O_x).

Démonstration :

On considère une onde se propageant à célérité constante sans déformation le long d'un axe (O_x) qu'on écrira $s(x,t)$. Notons x_0 et x_1 deux positions le long de l'axe (O_x) telles que $x_0 < x_1$. Si l'onde se propage vers les x positifs et atteint x_0, la définition de la célérité indique que l'onde atteindra x_1 avec un retard

$$\Delta t = (x_1 - x_0)/c.$$

On peut faire une représentation temporelle de cette onde aux deux positions différentes ce qui donne la figure de droite.



Pour une représentation temporelle, on constate que passer d'une position x_0 à une autre x_1 correspond à translater le signal d'une quantité Δt. Il vient donc que pour tout temps :

$$s(x_1,t) = s\left(x_0,t - \frac{x_1 - x_0}{c}\right). \tag{3.2}$$

De façon générale, on peut exprimer le signal temporel $s(x,t)$ à une position x quelconque le long de l'axe (O_x) en se référençant par rapport à l'origine (remplacer x_0 par 0 et x_1 par x), ce qui donne le résultat :

$$s(x,t) = s\left(0,t - \frac{x}{c}\right). \tag{3.3}$$

La fonction de droite ne dépend que du paramètre $t - \dfrac{x}{c}$, on peut donc simplifier la notation du signal $s(x,t)$ en l'exprimant avec une fonction d'une seule variable : on retombe sur l'équation (3.4) dans le cas d'une propagation suivant les axes positifs.

□

3.3 Expression spatiale de la propagation d'une onde

Théorème 2 - Expression spatiale d'une onde progressive

Une onde progressive se propageant à une célérité c dans la direction de l'axe (O_x), sans atténuation ni déformation, peut être mise sous la forme mathématique suivante :

$$s(x,t) = g\left(x \pm ct\right), \tag{3.4}$$

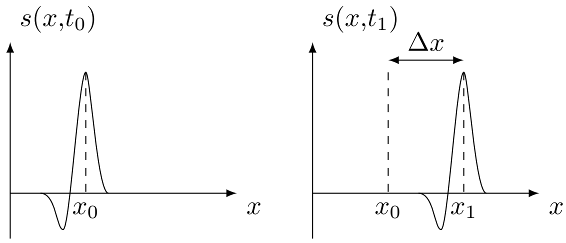
où g est fonction d'une unique variable homogène à une longueur et où le signe - (resp. +) correspond à une propagation suivant le sens positif (resp. négatif) de l'axe (O_x).

Démonstration :
On reprend l'onde étudiée dans la démonstration précédente. La représentation spatiale de l'onde est inversée par rapport à la représentation temporelle (cliquer ici pour visualiser la propagation d'une onde dont le profil est non symétrique). On représente sur la figure de droite, la forme spatiale de l'onde à deux instants. Entre les instant t_0 et t_1, l'onde aura parcouru, d'après la définition de la célérité, une distance $\Delta x = c(t_1 - t_0)$. On peut donc exprimer pour tout x et t :

$$s(x,t) = s(x - ct,0).$$

On retombe sur une fonction à une unique variable homogène à une longueur.

□



Exercice 4.5

Soit $s(x,t)$ une onde de la forme :

$$s(x,t) = A\mathrm{e}^{-\dfrac{x^2 - 2ctx + c^2t^2}{2\sigma^2}}.$$

Montrer que cette onde est progressive et donner la fonction $f(y)$ associée. Dans quel sens de l'axe (O_x) l'onde se propage ? Quelle est la dimension de σ ?

3.4 Onde progressive sinusoïdale

Définition 6 - onde sinusoïdale à une dimension

Onde qui peut être représentée en tout point de sa propagation par une forme sinusoïdale dans le temps. En notant (O_x) l'axe de propagation et ω la pulsation de l'onde, elle peut être mise sous la forme mathématique suivante :

$$s(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \varphi(x)),$$

où $A(x)$ et $\varphi(x)$ correspondent respectivement à l'amplitude et à la phase à l'origine à une position x de l'axe. On note par convention A_0 et φ_0 respectivement l'amplitude et la phase à l'origine en $x = 0$.

Propriété 4 - onde progressive sinusoïdale

Une onde progressive sinusoïdale se propageant sans déformation ni atténuation dans le sens des x positifs s'écrit :

$$s(x,t) = A_0\cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

La célérité $c = \dfrac{\omega}{k}$ de l'onde progressive sinusoïdale est appelée **vitesse de phase**.

Exercice 4.6

Démontrer la propriété 4 à partir des théorèmes précédents. Comment s'écrit une onde progressive sinusoïdale sans atténuation ni déformation suivant les x décroissants ?

Remarque : Mise sous cette forme, l'onde est sinusoïdale temporellement et spatialement. La pulsation ω caractérise la périodicité temporelle de l'onde : l'onde revient à sa forme initiale au bout d'une durée $2\pi/\omega$ toutes choses égales par ailleurs. De manière similaire, la quantité k décrit la périodicité spatiale de l'onde : l'onde revient à sa forme initiale au bout d'un déplacement $2\pi/k$, toutes choses égales par ailleurs. Cette remarque incite à définir une période, une fréquence et une pulsation spatiale. C'est l'objet des définitions et du tableau ci-dessous.

Définition 7 - Période, fréquence et pulsation spatiale

On définit les quantités suivantes :

- ☆ Le vecteur d'onde k, appelé aussi pulsation spatiale.
- ☆ La longueur d'onde $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$, appelée aussi la période spatiale.
- ☆ Le nombre d'onde $\sigma = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{k}{2\pi}$, appelé aussi la fréquence spatiale.

	Période	Fréquence	Pulsation
Temps	T	f	ω
Espace	λ	σ	k

TAB. 4.1 – Grandeurs caractérisant la double périodicité de l'onde progressive sinusoïdale.

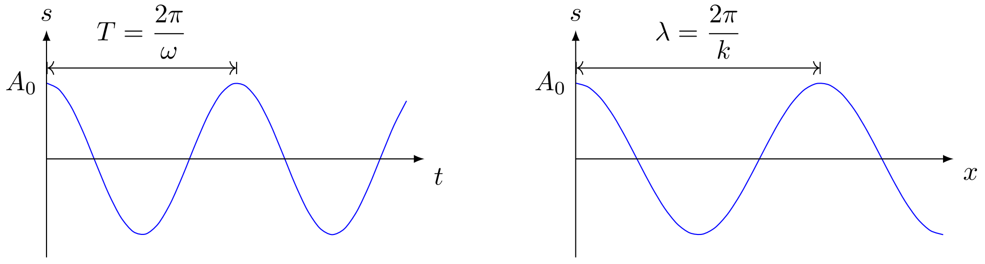


FIG. 4.1 – Représentation d'une onde progressive sinusoïdale en temps et en position.

Exercice 4.7

Par quoi sont reliées les périodes spatiales et temporelles ?

4 Phénomène d'interférence

4.1 Expérience des trous d'Young

Expérience cuve à onde + fentes d'Young.

On pourra appréhender le phénomène d'interférence par l'outil de simulation suivant : ici

L'expérience des trous ou fentes d'Young correspond à une expérience d'interférence d'une onde lumineuse dite par "division du front d'onde". Elle consiste à éclairer avec une onde plane quasi-monochromatique une plaque percée de deux trous (ou de fentes fines) larges de quelque centaines de fois la longueur d'onde et espacées d'environ le même ordre de grandeur. Les trous vont alors diffracter la lumière incidente et l'écartement faible entre trous (ou fentes) conduit les deux zones de diffraction à se chevaucher. En plaçant un écran dans un plan parallèle au plan des fentes, il apparaît des **franges d'interférences**, c'est à dire des variations spatiales de l'intensité lumineuse en forme de bande lumineuse ou sombre (frange). Expérimentalement, le laser est une source lumineuse bien adaptée à ce type d'expérience.

La formule de Fresnel obtenue dans la partie précédente est une bonne **approximation**[1] de ce qui est observé expérimentalement. Il est notamment possible, en mesurant l'écart entre plusieurs franges , de retrouver la valeur de $\lambda D/a$ et d'en déduire λ par une mesure de D (distance trous(ou fentes)/écran) et la valeur de a (distance entre trous (ou fentes)) souvent donnée par le constructeur.

4.2 Formule de Fresnel

Soit deux point source notés 1 et 2 émettant respectivement un signal $s_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$, disposés à une distance a l'un de l'autre. Nous prendrons l'exemple de sources lumineuses. Nous cherchons à observer sur un écran situé à une distance D très grande devant a et dans une direction faisant un angle faible avec la médiatrice de ces deux points source, un phénomène d'interférence entre ces deux signaux (cf figure 4.2). Nous supposerons qu'il n'y a pas d'obstacles ou de milieu matériel sur les chemins empruntés par la lumière.

1. L'intensité lumineuse est fonction de l'angle que fait le rayon diffracté. Il est possible de calculer le profil de l'intensité lumineuse diffractée par une fente, ce qui est au programme de deuxième année.

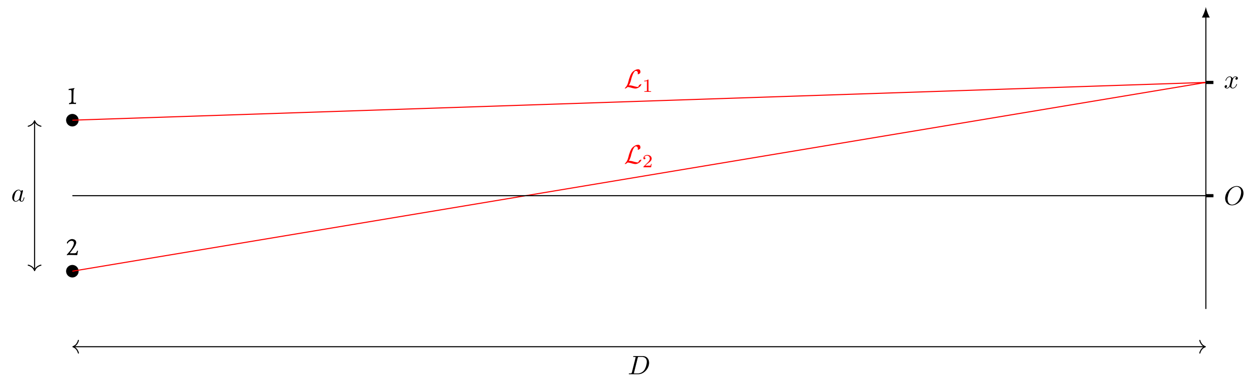


FIG. 4.2 – On suppose que les points lumineux émettent un signal monochromatique, dans la direction du point d'ordonnée x sur un écran à distance D des points source, qui se propage sans atténuation, ni déformation, ni dispersion et dans un milieu d'indice égal à 1.

Notons $\mathcal{L}_1$ (respectivement $\mathcal{L}_2$) la distance parcourue par le rayon provenant de la source 1 (respectivement la source 2) et atteignant l'écran en x. Ces deux distances s'appellent, dans le cadre de l'optique et dans le cas d'un milieu de propagation correspondant au vide, **des chemins optiques** [2]. La différence entre ces chemins, de la source 2 par rapport à la source 1, s'appelle une **différence de marche**. Elle est notée δ et vérifie par définition :

$$\delta = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1.$$

L'intensité perçue par un détecteur d'un signal optique monochromatique est proportionnelle à la moyenne temporelle du carré de ce signal sinusoïdal [3] :

$$I = \alpha\langle s^2(t)\rangle \tag{4.1}$$

avec α une constante indépendante de la source d'émission. Nous allons montrer que l'intensité observée en x sur l'écran due à la somme des signaux 1 et 2, dépend grandement de la différence de marche.

Formules mathématiques :

1. La moyenne d'un cosinus sur une ou plusieurs périodes vaut 0 (proportionnel à l'aire sous la courbe sur une ou plusieurs périodes).
2. La moyenne du carré d'un cosinus sur une ou plusieurs périodes vaut [4] 1/2.
3. $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$
4. $\cos(x) = -\cos(x)$
5. Développement limité à l'ordre 1 pour $\varepsilon \ll 1$ de $(1+\varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$

Notations des propriétés des signaux

6. La différence de phase du signal 1 par rapport au signal 2 est notée $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$
7. La période temporelle T de l'onde est reliée à sa période spatiale λ par la vitesse de phase c : $\lambda = cT$

Retard des signaux :

Le signal en x sur l'écran provenant de 1 est retardé de $\mathcal{L}_1/c$. L'expression du signal 1 seul en x obtenu après propagation vérifie donc, d'après l'expression du signal en 1 et du retard :

$$s_1\left(t - \frac{\mathcal{L}_1}{c}\right) = A_1\cos\left[\omega\left(t - \frac{\mathcal{L}_1}{c}\right) + \varphi_1\right]$$

Le signal en x sur l'écran provenant de 2 est retardé de $\mathcal{L}_2/c$. L'expression du signal 2 seul en x obtenu après propagation vérifie donc, d'après l'expression du signal en 2 et du retard :

$$s_2\left(t - \frac{\mathcal{L}_2}{c}\right) = A_2\cos\left[\omega\left(t - \frac{\mathcal{L}_2}{c}\right) + \varphi_1\right]$$

Intensité des signaux 1 et 2 en x (HP) :
Dans le cadre de cet exercice, définissons I_1 et I_2 les intensités dues aux signaux 1 et 2.

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha\left\langle A_1^2\cos^2\left[\omega\left(t - \frac{\mathcal{L}_1}{c}\right) + \varphi_1\right]\right\rangle \\ &= \frac{\alpha A_1^2}{2} \quad \text{D'après la formule mathématique 2.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \alpha\left\langle A_2^2\cos^2\left[\omega\left(t - \frac{\mathcal{L}_2}{c}\right) + \varphi_2\right]\right\rangle \\ &= \frac{\alpha A_2^2}{2} \quad \text{D'après la formule mathématique 2.} \end{aligned}$$

Moyenne du carré de la somme des signaux (HP) :
Par définition, l'intensité I sur l'écran au point x vérifie :

2. De manière générale, pour une propagation sur une distance L dans un milieu d'indice n, le chemin optique est égal à $n \times L$.
3. Vous verrez en deuxième année que "l'intensité" ou "l'éclairement" correspond à un facteur près à la moyenne temporelle du carré du champ électrique. $s(t)$ est une façon déguisée d'introduire les calculs d'interférences pour deux champs électriques se réduisant sous forme scalaire.
4. En effet on peut réécrire l'intégrale de $cos^2(x)$ sur une période en intégrale de $cos(2x)/2 + 1/2$. Le premier terme est nul d'après la propriété 1 précédente et le second vaut 1/2.

$$I = \alpha \left\langle \left[s_1\left(t - \frac{\mathcal{L}_1}{c}\right) + s_2\left(t - \frac{\mathcal{L}_2}{c}\right) \right]^2 \right\rangle$$

Développons le carré puis simplifions l'expression par les définitions introduites I_1 et I_2, et par les formules mathématiques.

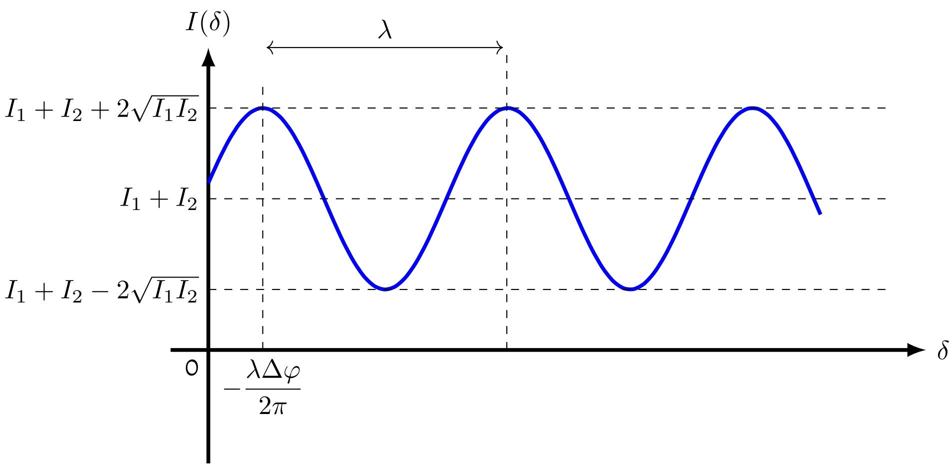
$$\begin{aligned}
I &= \alpha \left\langle s_1^2\left(t - \frac{\mathcal{L}_1}{c}\right) + s_2^2\left(t - \frac{\mathcal{L}_2}{c}\right) + 2 s_1\left(t - \frac{\mathcal{L}_1}{c}\right) s_2\left(t - \frac{\mathcal{L}_2}{c}\right) \right\rangle \\
&= \alpha \left\langle s_1^2\left(t - \frac{\mathcal{L}_1}{c}\right) \right\rangle + \alpha \left\langle s_2^2\left(t - \frac{\mathcal{L}_2}{c}\right) \right\rangle + 2\alpha \left\langle s_1\left(t - \frac{\mathcal{L}_1}{c}\right) s_2\left(t - \frac{\mathcal{L}_2}{c}\right) \right\rangle && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= I_1 + I_2 + \underbrace{\alpha A_1 A_2}_{=2\sqrt{I_1 I_2}} \left\langle 2\cos\left[\omega\left(t - \frac{\mathcal{L}_1}{c}\right) + \varphi_1\right] \cos\left[\omega\left(t - \frac{\mathcal{L}_2}{c}\right) + \varphi_2\right] \right\rangle && \text{par définition de } I_1 \text{ et } I_2 \\
&= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \left\{ \underbrace{\left\langle \cos\left[\omega\left(2t - \frac{\mathcal{L}_1}{c} - \frac{\mathcal{L}_2}{c}\right) + \varphi_1 + \varphi_2\right] \right\rangle}_{\text{Terme nul d'après 1.}} + \underbrace{\left\langle \cos\left[\frac{\omega\left(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2\right)}{c} + \varphi_2 - \varphi_1\right] \right\rangle}_{\text{Indépendant de } t} \right\} && \text{d'après 4.} \\
&= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left[\underbrace{\frac{\omega\left(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2\right)}{c}}_{\text{fonction de la différence de marche}} + \underbrace{\varphi_2 - \varphi_1}_{\text{déphasage entre les sources}} \right] \\
&= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left[\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \Delta\varphi\right] && \text{d'après 4, 6 et 7.}
\end{aligned}$$

L'expression :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left[\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \Delta\varphi\right],$$

est la **formule de Fresnel**. Elle n'est pas à connaître mais à savoir utiliser lorsqu'elle est donnée dans un énoncé.

Visualisation de l'intensité obtenue en fonction de δ :



Expression du contraste des franges d'interférences (HP) :
Le contraste est égal au rapport entre la différence maximale d'intensité et la moyenne spatiale de l'intensité du signal :

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}$$

Dans le cas de ces interférences :

$$\mathcal{C} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

Le contraste est maximal [5] pour $I_1 = I_2$

5. Se démontre aisément en posant $\mathcal{C}(y) = \dfrac{2\sqrt{y}}{1+y}$ où $y = I_1/I_2$ et en cherchant un extremum de $\mathcal{C}$ en fonction de y. L'extremum est un maximum en $y = 1$.

Expression de δ en fonction de x par développement limité :
On suppose d'après l'énoncé du problème que $\dfrac{x}{D} \ll 1$ et $\dfrac{a}{D} \ll 1$. Par construction, d'après la figure 4.2 :

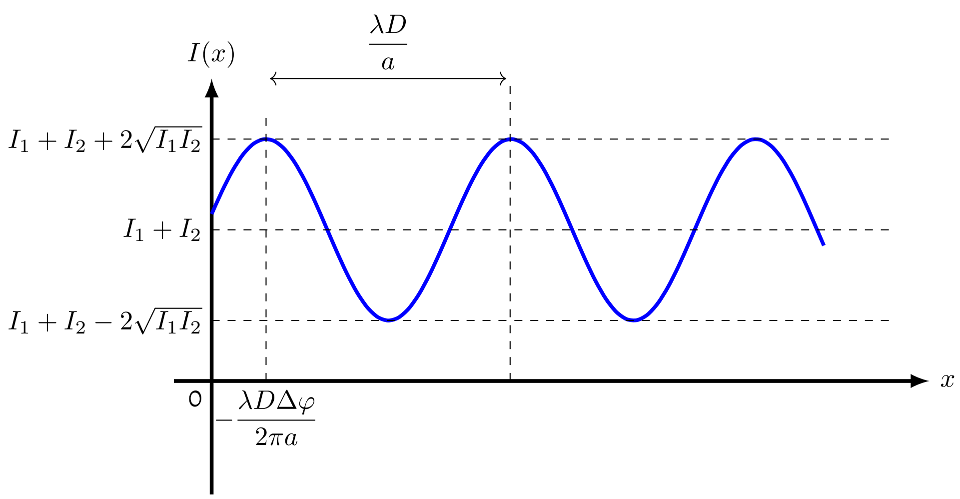
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} \\ &= D\left[1 + \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2\right]^{1/2} \\ &\simeq D\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} \\ &= D\left[1 + \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2\right]^{1/2} \\ &\simeq D\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2\right]\end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue à partir d'un DL à l'ordre 1 sur $\dfrac{x - \frac{a}{2}}{D}$ et $\dfrac{x + \frac{a}{2}}{D}$ (formule 5). La différence de chemin optique s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\delta &= \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 \\ &\simeq D - D + \frac{D}{2}\left[\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 - \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2\right] \\ &\simeq \frac{D}{2}\left[\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D} + \frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D} - \frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)\right] \\ &\simeq \frac{D}{2}\left[\left(\frac{2x}{D}\right)\left(\frac{a}{D}\right)\right] \\ \delta &\simeq \frac{ax}{D}\end{aligned}$$

Visualisation de l'intensité obtenue sur l'écran en fonction de x :



Remarque : $\dfrac{\lambda D}{a}$ est appelée interfrange : c'est la distance entre deux franges lumineuses ou deux franges sombres.

Condition d'interférence et déphasage entre signaux :
D'après la formule de Fresnel :

Les signaux sont en phase en x si

$$\delta = p\lambda - \frac{\lambda\Delta\varphi}{2\pi}$$

pour tout $p \in \mathbb{Z}$. L'interférence est alors constructive et le maximum d'intensité est atteint ($I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$).

Les signaux sont en opposition de phase en x si

$$\delta = p\lambda + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda\Delta\varphi}{2\pi}$$

pour tout $p \in \mathbb{Z}$. L'interférence est alors destructive et le minimum d'intensité est atteint ($I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$).