Chapitre

15 Oscillateurs

1 Introduction

Branche d'arbre
Règle
Bille dans un bol
Pendule
Diapason
Pistes en terre battue + ressort

Etape 1 : simplifier (harmonique)
Etape 2 : ajouter les pertes d'énergies
Etape 3 : soumettre à une excitation périodique

Tout comme les circuits du premier ordre, l'étude de ces oscillateurs du deuxième ordre peuvent être fait en régime transitoire ou en régime permanent (continu ou sinusoïdal).

2 L'oscillateur harmonique

2.1 Modèle de l'oscillateur harmonique

Définition 1 - Equation de l'oscillateur harmonique

L'équation différentielle linéaire

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = C, \tag{2.1}$$

où C est une constante et ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur et se mesure en rad.s^{-1}, est appelée **équation de l'oscillateur harmonique**. Lorsque la constante C est nulle, l'équation est dite **sans second membre**.

Remarque : L'équation sans second membre est parfois appelée équation homogène. Rien à voir avec l'homogénéité entre grandeurs physiques traité au chapitre 1.

Définition 2 - Oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique est un système caractérisé par une grandeur vérifiant l'équation de l'oscillateur harmonique.

La définition mathématique de ce modèle n'empêche pas de trouver des systèmes physiques qui se comportent de la même manière, bien au contraire. Un pendule, un circuit électrique LC ou une masse accrochée à un ressort en sont des exemples.

2.2 Exemple de systèmes

Exo : Circuit LC série avec condensateur initialement chargé (démontrer que l'équation de l'OH est obtenue. Masse + ressort (écrire l'équation uniquement)

2.3 Solution générale

La solution générale $x(t)$ de l'équation (2.1) se décompose en deux termes, $x_0(t)$ la solution générale de l'équation sans second membre et x_1 une solution particulière de l'équation (2.1), tel que :

$$x(t) = x_0(t) + x_1, \tag{2.2}$$
$$x_0(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t), \tag{2.3}$$
$$x_1 = \frac{C}{\omega_0^2}, \tag{2.4}$$

avec ω_0, A et B des constantes.

Exercice 15.1

Montrer que l'on peut réécrire la solution générale de l'équation sans second membre sous la forme $x_0(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$. Relier les constantes X_0 et ϕ_0 à A et B. A quoi correspondent X_0 et ϕ_0 ?

Solution : X_0 et phi_0 correspondent respectivement à l'amplitude et à la phase à l'origine de l'élongation (A et B ne caractérisent donc pas à eux seuls l'amplitude ou la phase à l'origine de l'élongation). En décomposant la dernière forme $x_0(t)$ avec les formules trigonométriques on a $x_0(t) = X_0 \cos(\phi_0)\cos(\omega_0 t) - X_0 \sin(\phi_0)\sin(\omega_0 t)$. Par identification, $A = X_0 \cos(\phi_0)$ et $B = -X_0 \sin(\phi_0)$. Pour exprimer X_0 en fonction de A et B, à partir des formules trigonométriques on obtient $X_0 = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$ et $\phi_0 = \arctan(-B/A)$ pour $-B/A \in]-\pi,\pi[$. On voit que l'expression de X_0 et ϕ_0 en fonction de A et B n'est pas unique. On préférera l'utilisation de la forme (2.3) par rapport à l'expression $X_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ sauf si des conditions le permettent : par exemple, après la prise en compte des conditions initiales ou lorsque cette expression est donnée par l'énoncé.

2.4 Application au circuit LC

Exercice 15.2

Pour une charge initiale du condensateur Q et un courant initial nul, exprimer la tension aux bornes du condensateur dans un circuit LC en fonction du temps.

2.5 Caractéristiques du mouvement

Définition 3 - Amplitude

Ecart entre la valeur maximale et la valeur médiane d'une grandeur décrivant l'oscillation d'un système.

Définition 4 - Pulsation propre

Correspond au coefficient ω_0 qui apparait dans l'équation de l'oscillateur harmonique (2.1). Il est homogène à l'inverse d'un temps.

Définition 5 - Fréquence

La fréquence d'un oscillateur harmonique est reliée à sa pulsation propre par la relation $\omega_0 = 2\pi f$. Elle est homogène à l'inverse d'un temps

Définition 6 - Période

La période d'un oscillateur harmonique est reliée à sa fréquence par la relation $T = 1/f$. Elle est homogène à un temps.

Remarque : Ces définitions peuvent être étendues à d'autres systèmes oscillants car un signal périodique peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux ayant chacun une période et une amplitude propre.

2.6 Conservation de l'énergie

Exercice 15.3

Montrer que l'énergie stockée dans le condensateur chargé Q et sans courant le traversant à l'état initial est à tout moment conservée dans le circuit LC.

3 Etude qualitative d'un oscillateur amorti

3.1 Oscillateur électrique amorti

Expérience : On se propose d'étudier expérimentalement le système représenté sur la figure 7.1. On ferme le circuit en $t = 0$ avec une tension nulle aux bornes du condensateur. Le but est de montrer :

1. **Les régimes permanents :** valeurs fixes de la tension aux bornes du condensateur pour $t < 0$ et $t \to \infty$.
2. **Le régime transitoire :** oscillations en tension aux bornes du condensateur.
3. **Temps caractéristique du régime transitoire :** la durée du régime transitoire dépend de la valeur des composants. Plus R et $1/L$ sont grands, plus le temps de ce régime est long.
4. **Période caractéristique des oscillations :** des oscillations apparaissent lorsqu'on augmente L, $1/C$ et $1/R$.
5. **Oscillateur pseudo-périodique ou apériodique :** Si R est très petit devant $\sqrt{L/C}$, les oscillations sur quelques périodes sont quasi-sinusoïdales (pseudo-périodique). Au contraire si R est très grand devant $\sqrt{L/C}$, il n'y a plus d'oscillations.

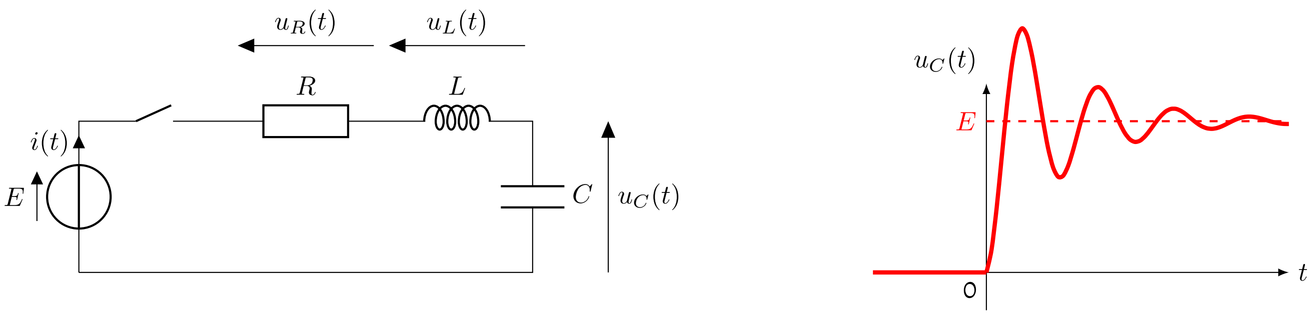

FIG. 15.1 – Représentation du circuit RLC série et visualisation de la tension aux bornes du condensateur après fermeture du circuit via l'interrupteur (en $t = 0$).

Exercice 15.4

Montrer que la tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y} + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{CL}y = \frac{y_0}{CL},$$

avec y_0 une constante que l'on déterminera.

3.2 Oscillateur mécanique amorti

Expérience : On ajoute, sur le système masse+ressort du chapitre 2, une force de frottement fluide vérifiant

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v},$$

avec α un coefficient de frottement positif. L'équation caractéristique du mouvement devient :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0.$$

On observe des comportements similaires (même formes de réponses temporelles et de portrait de phase) entre l'élongation et la tension aux bornes d'un condensateur lorsque la masse est lâchée. Lorsque l'on soumet le système à une excitation avec un moteur, le système passe par une amplitude d'élongation très élevée pour une fréquence d'excitation précise.

Exercice 15.5

A partir de l'équation caractéristique du mouvement, déterminer la variation d'énergie mécanique de la masse. Montrer que la variation de l'énergie mécanique dépend du signe de α et conclure.

3.3 Equation d'un oscillateur harmonique amorti (OHA)

Définition 7 - Forme canonique de l'équation différentielle d'un OHA

L'équation différentielle d'un OHA est une équation différentielle linéaire du second ordre et se met sous une forme générale et simplifiée :

$$\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = C_0, \tag{3.1}$$

où y est la variable temporelle, ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur, Q son facteur de qualité et C_0 une constante.

Exercice 15.6

1. A partir de l'exercice précédent, déterminer Q et ω_0 par identification avec l'équation de l'OHA.
2. Faire de même avec l'OHA mécanique.
3. A quoi sont homogènes Q et ω_0 ?
4. Sur quelle équation retombe-t'on si on fait tendre Q vers $+\infty$?
5. On définit le facteur d'amortissement [a] ξ par $\xi = 1/2Q$. Réécrire l'équation et expliquer son nom à partir de la question précédente.

a. On trouve parfois la notation m pour ce facteur, à ne pas confondre avec une masse possible présente dans le système.

4 Etude quantitative d'un OHA

Nous cherchons à trouver la solution $y(t)$ de l'équation (3.1). Elle est de la forme :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t), \tag{4.1}$$

où $y_h(t)$ représente la solution de l'équation homogène et $y_p(t)$ la solution particulière. Nous allons nous intéresser dans un premier temps à la solution de l'équation homogène puis nous feront la résolution complète en fonction du terme dit de forçage.

4.1 Méthode de l'équation caractéristique

L'équation différentielle homogène du second ordre à coefficients s'écrit de manière générale :

$$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = 0 \tag{4.2}$$

Cherchons les solutions [1] sous la forme $\exp(rt)$. Si nous injectons cette expression dans l'équation (4.2) nous obtenons l'équation caractéristique de l'équation différentielle :

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{4.3}$$

Il suffit de trouver les solutions de l'équation caractéristique pour construire la solution de (4.2). On distingue trois types de solutions en fonction du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

1. Lorsque $\Delta > 0$, en notant r_1 et r_2 les racines de l'équation caractéristiques, les solution s'écrivent :
$$f(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t).$$
2. Lorsque $\Delta < 0$, en notant $r_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ les racines de l'équation caractéristiques (j la valeur complexe), les solution s'écrivent :
$$f(t) = (A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))\exp(\alpha t).$$
3. Lorsque $\Delta = 0$, cas limite qui n'arrive jamais expérimentalement, les solutions sont de la forme :
$$f(t) = (A + Bt)\exp\left(-\frac{bt}{2a}\right).$$

4.2 Solutions

En reprenant l'équation 3.1 de l'OHA on peut montrer que la condition sur le discriminant du paragraphe précédent équivaux à une condition sur le facteur de qualité Q (et donc sur le facteur d'amortissement) résumé dans le tableau 7.1. La solution de l'équation homogène, comme C_0 est une constante, conduit à $y_p(t) = C_0/\omega_0^2$ qui ne dépend pas du temps.

1. Pour plus de précisions, la résolution sera vue en cours de Mathématiques.

Type de régime	Discriminant	Fct. qualité	Fct. amortissement	Solutions
Apériodique	$\Delta > 0$	$Q < 1/2$	$\xi > 1$	$y(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t) + \dfrac{C_0}{\omega_0^2}$
Pseudo-périodique	$\Delta < 0$	$Q > 1/2$	$\xi < 1$	$y(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\right) + \dfrac{C_0}{\omega_0^2}$
Critique	$\Delta = 0$	$Q = 1/2$	$\xi = 1$	$y(t) = (A + Bt)\exp(-\omega_0 t) + \dfrac{C_0}{\omega_0^2}$

TAB. 15.1 – Solutions de l'équation différentielle de l'OHA en fonction du type de régime. Le terme $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/4Q^2}$ est appelé la pseudo-pulsation.

Remarques :

- ☆ Les solutions sont dites stables si les solutions convergent en $t \to +\infty$. Dans le cas de l'équation de l'OHA sous sa forme canonique (3.1), cela correspond juste à une seule condition : $\omega_0/Q > 0$. Dans le cours de deuxième année, nous verrons que le critère de stabilité peut être généralisé à d'autres types de systèmes.
- ☆ Les termes A et B des solutions se déterminent comme pour l'oscillateur harmonique à partir de deux conditions initiales ou de deux conditions particulières (comme deux positions différentes du système à des temps différents pour un oscillateur mécanique). Un autre type de condition vient s'ajouter : les conditions asymptotiques. Elle correspond par exemple à la connaissance du régime lorsque $t \to +\infty$. Comme le système est stable (pas d'autre cas en première année que $\omega_0/Q > 0$), $y(t)$ converge vers la constante C_0/ω_0^2. Si $y(t)$ est proche de cette constante, on peut raisonnablement dire que le système à atteint un régime permanent.
- ☆ Pour le régime pseudo-périodique, on constate que la solution est constituée d'une solution périodique que multiplie une exponentielle décroissante. On utilise le terme d'**enveloppe** exponentiellement décroissante (courbes en pointillés de la figure 7.2) pour décrire l'amplitude de la solution pseudo-sinusoïdale

4.3 Détermination expérimentale du facteur de qualité

Par analogie avec les système du premier ordre du chapitre précédent, il est possible de déterminer la durée du régime transitoire. Pour les différents régimes, il est de l'ordre de

$$T = 3\tau = 3\frac{2Q}{\omega_0}, \tag{4.4}$$

avec $T_0 = \omega_0/2\pi$ et τ le temps caractéristique de décroissance (terme qui apparaît dans l'exponentielle dans le régime pseudo-périodique). Le facteur 3 permet d'approcher le régime permanent à moins de 5% de l'amplitude initiale :

$$\left|y(t) - \frac{C_0}{\omega_0^2}\right| \leq 0{,}05 \times \left|y(t=0) - \frac{C_0}{\omega_0^2}\right| \quad \text{pour } t > T.$$

Une façon approximative mais rapide de déterminer Q par lecture graphique est de compter le nombre d'oscillations N entre le début du régime transitoire et le temps T (où les oscillations ne sont pratiquement plus visibles). En utilisant la relation (4.4) et en la relier à la période T_p des oscillations, on obtient pour $Q \gg 1/2$ et en prenant $2\pi \simeq 6$:

$$\frac{T}{T_p} \triangleq N \simeq Q \tag{4.5}$$

Le nombre d'oscillations correspond approximativement au facteur de qualité. Cette approximation est valable pour de grand facteur de qualité, la période des oscillations étant alors $T_p \simeq T_0 = 2\pi/\omega_0$. Dans le cas de facteur Q proches de 1 et en dessous, cette période dépend aussi de Q ce qui rend l'expression de N difficilement utilisable. Se référer à la figure 7.2 pour des exemples de régimes.

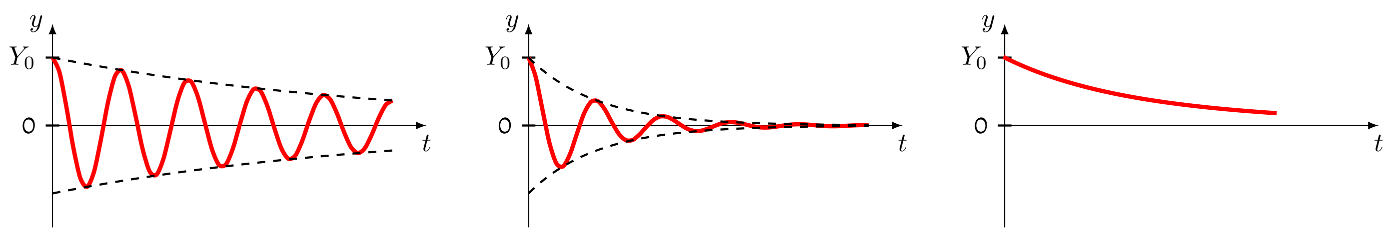

FIG. 15.2 – Représentation de différents régimes d'OHA en fonction du facteur de qualité Q. De gauche à droite $Q = 8$, $Q = 1{,}5$, $Q = 1/4$.

Pour déterminer plus précisément les caractéristiques du système, la méthode la plus fiable reste la modélisation des données expérimentales par les fonctions répertoriées dans le tableau 7.1 pour en extraire les valeurs de Q et ω_0.

4.4 Bilan de puissance

Effectuons un bilan de puissance sur un circuit RLC série (figure de droite) ayant stocké préalablement de l'énergie. A t=0, on ferme le circuit et on cherche comment va évoluer l'énergie stockée. En appliquant la loi des mailles on trouve $u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = 0$. En utilisant les caractéristiques courant-tension des composants et en multipliant la relation par le courant $i(t)$ qui circule dans la maille on trouve :

$$Ri^2(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right) = 0 \tag{4.6}$$

On a d'après (4.6) :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}(t)}{\mathrm{d}t} = -Ri^2(t) \tag{4.7}$$

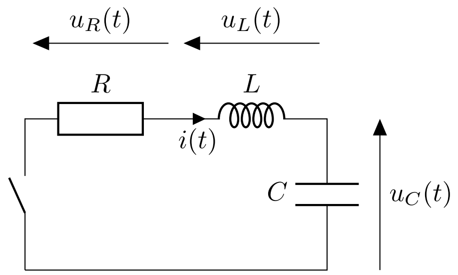

FIG. 15.3 – Schéma d'un circuit RLC série. Le circuit est préalablement chargé en $t < 0$ et en $t = 0$ on ferme l'interrupteur.

On identifie le premier terme à la puissance dissipée par effet Joule, et les deux autres termes à la variation d'énergie stockée par la bobine et le condensateur. On note

$$\mathcal{E}(t) = \left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right) + \left(\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right)$$

qui est, à une constante près, l'énergie stockée par la bobine et le condensateur à l'instant t. L'équation (4.7) indique comment évolue l'énergie du système : l'énergie stockée par la bobine et le condensateur diminue au cours du temps (le terme $Ri^2(t)$ est forcément strictement positif pour $i \neq 0$) ou reste fixe lorsque $i = 0$. Cette énergie est transformée sous forme de chaleur par la résistance : c'est l'effet Joule, où l'énergie électrique est convertie sous forme de chaleur.

Exercice 15.7

Faire la même étude avec l'oscillateur mécanique.
Aide :

- Commencer par multiplier la relation $m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = 0$ par $\dot{x}(t)$.
- Identifier ensuite les différents termes, en montrant que ceux-ci sont bien homogènes à des puissances.
- Comment varie expérimentalement l'énergie mécanique du système au cours du temps ?
- Que doit vérifier α pour décrire cette observation ?

5 Etude d'un oscillateur en régime sinusoïdal forcé

Le régime forcé sinusoïdal d'un oscillateur du deuxième ordre correspond à utiliser comme terme de forçage une fonction dépendant du temps de façon sinusoïdale. Le **terme de forçage** correspond au membre de droite de l'équation (3.1), qui est constant dans le cas d'un OHA.

Définition 8

Un oscillateur du second ordre en régime sinusoïdal forcé est caractérisé par une variable $y(t)$ vérifiant :

$$\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 Y\cos(\omega t), \tag{5.1}$$

avec $Y > 0$.

Remarque : On notera la différence possible entre ω_0 pulsation propre du système et ω la pulsation de forçage. Il est possible d'étudier le régime transitoire de ce système comme nous l'avons fait pour l'échelon de tension. Ici ce n'est pas ce qui nous intéresse, nous cherchons ici à décrire le **régime permanent**. Dans le cas de l'échelon de tension, le régime permanent est continu au bout d'un temps suffisamment long ($t \gg 2\pi Q/\omega_0$). Dans le cas d'un régime forcé sinusoïdal, il existe un régime permanent qui est atteint au bout d'un temps suffisamment long mais qui est sinusoïdal.

Exemple

Dans le cas du circuit RLC série, on peut appliquer un forçage par un générateur variable délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. L'équation vérifiée par la tension aux bornes du condensateur $u_c(t)$ vérifie :

$$\ddot{u}_c + \frac{R}{L}\dot{u}_c + \frac{1}{CL}u_c = \frac{E}{CL}\cos(\omega t).$$

5.1 Méthode de résolution dans le cas du régime sinusoïdal forcé

Pour caractériser **le régime permanent**, une astuce mathématique est de transformer **l'équation différentielle** (5.1) en une **équation algébrique complexe**, de la résoudre et de prendre la solution réelle (qui elle seule à un sens physique). Voici les étapes pour y arriver :

1. On associe à une grandeur réelle $y(t) = y_0\cos(\omega_1 t + \varphi)$ une grandeur complexe [2] :
$$\underline{y}(t) = \underline{y_0}\exp(j\omega_1 t),$$
où $\underline{y_0} = y_0\exp(j\varphi)$ est appelée **amplitude complexe**.
2. On suppose que la solution $y_f(t)$ de l'équation (5.1) peuvent se mettre sous la forme d'une fonction sinusoïdale de pulsation égal à celui du terme de forçage (c'est-à-dire $\omega_1 = \omega$). On injecte donc une solution $\underline{y_0}\exp(j\omega t)$ dans l'équation (5.1).
3. On résout l'équation algébrique complexe ce qui donne une contrainte que l'amplitude complexe de l'onde doit vérifier.

Exercice 15.8

Appliquer les étapes précédentes pour déterminer $y(t)$, la solution en régime forcé de l'équation (5.1).
Maths : on utilisera la notation et les propriétés suivantes :

$$\arg(\exp(j\theta) = \arg(\cos(\theta) + j\sin(\theta) = \theta$$

$$Re(\underline{z}) = Re(|\underline{z}|\exp(j\arg(z))) = |\underline{z}|\cos(\arg(z)))$$

$$\arg(a + jb) = \begin{cases} \arctan(b/a), & \text{si } a > 0. \\ \pi + \arctan(b/a), & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Solution : En notant $y(t) = |\underline{y_0}|\cos\big(\omega t + \arg(\underline{y_0})\big)$:

$$|\underline{y_0}| = \frac{Y}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \qquad \arg(\underline{y_0}) = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{(x^2-1)Q}{x}\right)$$

5.2 Impédance d'un dipôle

L'exercice précédent nous a permis de découvrir des propriétés pratiques lorsqu'on étudie un système en régime sinusoïdal forcé :

Propriété 1

En régime sinusoïdal forcé à une pulsation ω, la dérivation d'une quantité revient, lors du passage en notation complexe, à multiplier celle-ci par $j\omega$. De manière similaire, intégrer revient à diviser par $j\omega$.

Ainsi, les caractéristiques courant-tension d'un condensateur et d'une bobine en régime sinusoïdal forcé s'exprime de façon simple en notation complexe :

$$\underline{i_c} = C\frac{\mathrm{d}\underline{u_c}}{\mathrm{d}t}, \qquad \underline{u_L} = L\frac{\mathrm{d}\underline{i_L}}{\mathrm{d}t},$$
$$\underline{i_c} = jC\omega\underline{u_c}, \qquad \underline{u_L} = jL\omega\underline{i_L}.$$

En régime sinusoïdal forcé, les bobines et condensateurs suivent des relations aussi simples que la loi d'Ohm "u=Ri". Pour généraliser cette relation courant-tension, on ne parle pas de résistance mais d'impédance électrique.

2. Se référer au chapitre 3 pour la représentation d'une onde sinusoïdale dans le plan complexe.

Définition 9 - Impédance électrique

L'impédance électrique est le rapport entre la différence de potentiel aux bornes d'un dipôle et le courant qu'elle provoque en convention récepteur. L'admittance électrique est l'inverse de l'impédance électrique.

Propriété 2 - Composants usuels en régime forcé

	Résistor	Bobine	Condensateur
Impédance(en Ω)	R	$jL\omega$	$1/jC\omega$
Admittance (en Ω^{-1})	1/R	$1/jL\omega$	$jC\omega$
Comportement H.F.	inchangé	I.O.	fil
Comportement B.F.	inchangé	fil	I.O.

Abréviation : I.O. pour interrupteur ouvert, H.F. pour hautes fréquences ($\omega \to \infty$), B.F. pour basses fréquences ($\omega \to 0$).

Propriété 3 - Lois des circuits en régimes forcés

Les lois des circuits vues avec des résistances s'appliquent aussi aux impédances électriques en régimes forcés. On retrouve notamment :

- ☆ La loi d'associations d'impédances en série (elles s'ajoutent) et en parallèle (les admittances s'ajoutent).
- ☆ Les lois des ponts diviseurs.
- ☆ La loi des nœuds en terme de potentiel, ou théorème de Milmann.

Exercice 15.9

Redémontrer ces lois sur des exemples simples.

5.3 Caractéristiques du régime sinusoïdal forcé

Principe

Dans l'exercice 7.8, nous avons vu que l'amplitude complexe $\underline{y_0}$ de la solution du régime forcé de l'équation (5.1) vérifie l'équation :

$$\underline{y_0} = \frac{Y}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}} \tag{5.2}$$

où $x = \omega/\omega_0$. Notons que la réponse du système dépend de ses propres caractéristiques (pulsation et facteur de qualité) mais aussi de l'amplitude et de la pulsation de l'excitation sinusoïdale. La réponse du système est donc une fonction de plusieurs variables : $\underline{y_0}(\omega,Y,\omega_0,Q)$. La méthode générale pour étudier ce type de système est d'étudier son comportement lorsqu'on modifie une de ses variables en fixant les autres. Dans notre cas, il est intéressant [3] d'étudier la réaction du système en fonction de la pulsation de l'excitation et de voir, pour une excitation donnée, comment le système réagit si l'on change son facteur de qualité.

Résonance

Définition 10 - pulsation de résonance

On appelle pulsation de résonance d'un système la valeur de la pulsation du terme de forçage pour laquelle l'amplitude de la réponse du système passe par un maximum.

3. Le comportement du système en fonction de l'amplitude de l'excitation est simple : plus on augmente l'amplitude Y de l'excitation, plus l'amplitude de la réponse augmente (la relation entre les deux est linéaire). Le comportement en fonction de la pulsation propre ω_0 est relié à celui de la pulsation d'excitation (car ces pulsations apparaissent sous forme de rapport), étudier l'un c'est étudier l'autre. Il reste donc deux "variables d'intérêt", ω et Q.

Pour trouver ce maximum on peut dériver l'expression de l'amplitude $|\underline{y_0}|$ en (5.2) et chercher lorsque celle-ci s'annule par rapport à ω. Cela revient, au vu de l'expression de l'amplitude, à déterminer lorsque le numérateur de la dérivée de $|\underline{y_0}|$ s'annule, i.e. lorsque : $4x(1-x^2-1/(2Q^2))=0$. Physiquement, nous nous intéressons uniquement aux cas où $\omega>0$ (excitation de pulsation non nulle et positive), il n'y a donc qu'une seule solution :

$$\omega=\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \quad \text{si} \quad Q>1/\sqrt{2}$$

On peut vérifier que c'est bien un maximum en montrant que le signe de la dérivée seconde de $|\underline{y_0}|$ par rapport à ω est négatif en ce point.

Propriété 4 - Pulsation et amplitude de résonance

La résonance du système caractérisé par l'équation (5.1) se produit pour une pulsation d'excitation notée ω_r vérifiant :

$$\omega_r=\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \quad \text{si } Q>1/\sqrt{2}. \tag{5.3}$$

L'amplitude de l'oscillation est alors de :

$$|\underline{y_0}(\omega_r)|=Y\frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \tag{5.4}$$

Remarques :

1. S'il existe une résonance alors le système est dans un régime pseudo-périodique car $Q>1/\sqrt{2}>1/2$. L'inverse n'est pas vrai (il existe des cas où $1/2<Q<1/\sqrt{2}$).
2. La pulsation de résonance ω_r n'est pas la pseudo-pulsation du régime périodique Ω (elle est légèrement plus faible $\omega_r<\Omega<\omega_0$). Cependant les valeurs de ω_r ,Ω et ω_0 se rapprochent proches plus Q augmente : on a pour $Q>5$ une différence entre ces valeurs inférieur au pour-cent.

Une façon pratique de visualiser l'impact du facteur de qualité sur la résonance est de tracer l'expression (5.2) l'amplitude $|\underline{y_0}(\omega)|$ en fonction de ω pour différentes valeurs de Q. C'est ce qui est fait sur la figure 7.4. Nous pouvons constater que plus le facteur de qualité augmente, plus un pic étroit en tension apparaît.

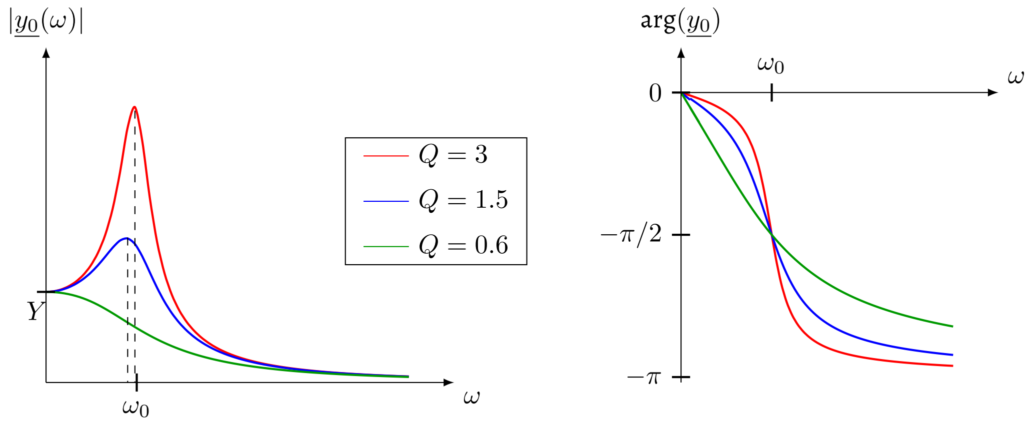

FIG. 15.4 – Représentation de l'amplitude et de la phase du système en fonction de la pulsation d'excitation pour différentes valeurs du facteur de qualité (d'après l'expression en (5.2)). On remarque que pour Q=0,6 il n'existe pas de résonance pour une pulsation proche de ω_0 alors que la condition du régime pseudo-périodique est satisfaite (Q>1/2).

5.4 Application à la résonance en intensité et en tension d'un RLC série

Définition 11 - Bande passante

La bande passante en pulsation notée $\Delta\omega$ d'un système est l'intervalle de pulsation où la réponse du système $\underline{y_0}(\omega)$ à une excitation sinusoïdale est appréciable (généralement une fraction du maximum de l'amplitude de réponse du système). La bande passante dépend de la variable utilisée pour caractériser le système (ex : tension ou courant en électronique, position ou vitesse en mécanique).

Convention 1 - Seuil pour la bande passante

On fixe généralement[a] ce seuil à $\max(|\underline{y_0}|)/\sqrt{2}$. S'il existe deux pulsations $0 \leq \omega_- < \omega_+$ tel que

$$\underline{y_0}(\omega_\pm) = \frac{\max(|\underline{y_0}|)}{\sqrt{2}},$$

alors la bande passante du système est donnée par $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$.
S'il n'en existe qu'une telle que $|\underline{y_0}|(\omega) \geq \max(|\underline{y_0}|)/\sqrt{2}$ pour $\omega \leq \omega_+$, alors la bande passante du système est donnée par $\Delta\omega = \omega_+$.

a. D'autres seuils existent : mi-hauteur, en $1/e^2$, etc.

Exercice 15.10

1. Donner l'équation différentielle de la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale $E\cos(\omega t)$ et la résoudre dans le cas d'un régime permanent. On notera $\underline{u}_c$ l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur.
2. Montrer que le circuit RLC série admet une résonance en tension aux bornes du condensateur. Déterminer la pulsation de résonance et l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur à résonance.
3. Montrer que l'on peut retrouver facilement l'expression complexe de l'amplitude en tension aux bornes du condensateur en utilisant les lois des ponts diviseurs.
4. Donner l'équation différentielle vérifiée par le courant. Montrer que l'amplitude complexe de l'intensité ne vérifie pas la même relation que celle de la tension.
5. Déterminer une pulsation de résonance et l'amplitude en intensité à résonance.
6. Montrer que la bande passante $\Delta\omega$ de l'amplitude en intensité vérifie : $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$.