Chapitre 20 Moment cinétique et applications

1 Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents comment utiliser le PFD pour en déduire des lois sur le mouvement d'un point matériel. Qu'en est-il d'un ensemble de points matériels ? Qu'en est-il d'un solide ? Nous allons voir comment à partir du PFD nous pouvons construire un nouveau théorème utile à la prévision du mouvement d'un ensemble de points matériels.

2 Théorème du moment cinétique pour un point matériel

2.1 Moment cinétique et moment d'une force

Définition 1 - Moment cinétique

Le moment cinétique par rapport à un point A d'un point matériel M dans un référentiel $\mathcal{R}$ s'écrit [a] :

$$\vec{L}_{\mathrm{M}/\{\mathrm{A},\mathcal{R}\}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}},$$

où $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est le vecteur position relatif au point A, et $\vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}} = m\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}$ la quantité de mouvement du point matériel M.

a. On peut trouver la notation $\vec{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}$ ou $\vec{\sigma}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}$ pour désigner ce moment cinétique. Ces notations souffrent toutes (y compris celle qui est introduite ici) d'une utilisation excessive mais exacte d'indices par soucis d'exhaustivité.

Remarques :

1. Le moment cinétique d'un point matériel est généralement choisi par rapport à un point A fixe dans le référentiel d'étude, souvent l'origine de celui-ci.
2. Le moment cinétique est défini par rapport à **deux** points A et O, le dernier étant l'origine du référentiel, dont l'expression du vecteur quantité de mouvement en dépend.

Exercice 20.1

1. Exprimer la relation qu'il y a entre les moments cinétiques $\vec{L}_{\mathrm{M}/\{\mathrm{A},\mathcal{R}\}}$ et $\vec{L}_{\mathrm{M}/\{\mathrm{O},\mathcal{R}\}}$.
2. Exprimer, en coordonnées cartésiennes, le moment cinétique d'un point matériel de masse M par rapport à l'origine O du référentiel $\mathcal{R}$. On utilisera deux méthodes de notation différentes pour écrire les vecteurs et calculer leur produit vectoriel : en notant les vecteurs unitaires ou en utilisant la notation simplifiée d'un vecteur dans une base orthonormée directe.
3. Faire de même en coordonnées cylindriques.

Remarques :

1. La première question est une propriété sur la composition des moments cinétiques. A partir d'une relation de Chasles on obtient : $\vec{L}_{\mathrm{M}/\{\mathrm{O},\mathcal{R}\}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}} + \vec{L}_{\mathrm{M}/\{\mathrm{A},\mathcal{R}\}}$.
2. Les deux questions suivantes peuvent se résoudre uniquement grâce au chapitre sur la cinématique (étude du mouvement sans se préoccuper des causes), et en effet il n'est pas question de forces ici. On peut déjà anticiper le fait que cet objet sera relié à la dérivée de la quantité de mouvement (terme de gauche dans le PFD). On construira ensuite le moment d'une force, un outils qui possède des propriétés similaires au moment cinétique, et relié à la partie droite du PFD.

Définition 2 - Moment d'une force

Le moment en A d'une force $\vec{F}_{\to M}$ exercée sur un point matériel M s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{\to \mathrm{M}}/\mathrm{A}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{F}_{\to M}.$$

Attention : Le moment d'une force et le moment cinétique ne doivent pas être confondus, ils n'ont pas la même signification, ni la même dimension : $\dim(L) = \mathrm{L}^2.\mathrm{M}.\mathrm{T}^{-1}$ et $\dim(\mathcal{M}) = \mathrm{L}^2.\mathrm{M}.\mathrm{T}^{-2}$.

Exemple

Considérons le cas du pendule simple : une masse m supposée ponctuelle attachée à un fil supposé infiniment fin de longueur ℓ, lui-même fixé à un solide fixe par rapport au référentiel d'étude (terrestre). Nous notons A le point d'attache entre le solide et le fil.
Un bilan des forces appliqué au point matériel M donne :

- Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$.
- La tension du fil $\vec{T}$.

Les moments calculés en A associés à ces deux forces vérifient :

- Pour le poids : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{P}/\mathrm{A}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge m\vec{g}$. En notant θ l'angle non orienté (positif) formé entre les vecteurs $\vec{g}$ et $\overrightarrow{AM}$ et en notant $\vec{u}$ le vecteur unitaire égal à $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{P}/\mathrm{A}}/\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{P}/\mathrm{A}}\right\|$, nous pouvons exprimer le moment en A du poids en fonctions des grandeurs du problème : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{P}/\mathrm{A}} = mg\ell\sin(\theta)\vec{u}$. Sachant que
- Pour la tension du fil : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{T}/\mathrm{A}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{T}$. En remarquant que cette force est toujours colinéaire à $\overrightarrow{AM}$, nous en déduisons que $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{T}/\mathrm{A}} = \vec{0}$

2.2 Projection des moments

Définition 3 - Bras de levier

Le bras de levier du moment en A d'une force $\vec{F}$ appliquée sur un point matériel M est la longueur définie par la quantité :

$$\frac{\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{\to\mathrm{M}}/\mathrm{A}}\right\|}{\|\vec{F}\|}.$$

Exercice 20.2

En reprenant l'exemple précédent sur le pendule simple, déterminer l'expression du bras de levier causé par le moment en A de la force de pesanteur exercée sur le point matériel M de masse m. Dans quel cas est-il maximal ?

Définition 4 - Moments scalaires

Soit un A un point à partir duquel est déterminé le moment cinétique ou le moment d'une force en lien avec un point matériel situé dans un référentiel $\mathcal{R}$. Soit Δ un axe passant par A et orienté par un vecteur unitaire noté $\vec{u}_\Delta$.

☆ Le moment cinétique scalaire du point M par rapport à l'axe Δ noté de manière simplifiée L_Δ vérifie :

$$L_\Delta = \vec{L}_{\mathrm{M}/\{\mathrm{A},\mathcal{R}\}} \cdot \vec{u}_\Delta$$

☆ Le moment scalaire d'une force appliquée en un point M par rapport à l'axe Δ noté $\mathcal{M}_{\vec{F}_{\to\mathrm{M}}/\Delta}$ vérifie :

$$\mathcal{M}_{\vec{F}_{\to\mathrm{M}}/\Delta} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{\to\mathrm{M}}/\mathrm{A}} \cdot \vec{u}_\Delta$$

Exercice 20.3

1. Quel serait l'axe approprié pour décrire le mouvement du pendule simple ?
2. En utilisant un système de coordonnées cylindrique et en prenant l'axe Δ comme axe de révolution, r la distance de M à l'axe, démontrer les assertions suivants :
   2.1. Le moment cinétique scalaire L_Δ ne dépend que de r et pas de la distance AM. Son expression fait intervenir la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$.
   2.2. Le bras de levier du moment en A vaut $r|\sin(\theta)|$.

Remarque : on montre ainsi que les moments scalaires par rapport à l'axe $(\mathrm{A},\vec{u}_\Delta)$ peuvent être déduit des moments vectoriels calculés par rapport à n'importe quel point A′ situé sur cet axe.

2.3 Variation du moment cinétique

Théorème du moment cinétique appliqué à un point matériel

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ **galiléen**, la dérivée du moment cinétique d'un **point matériel M** par rapport à un **point A fixe** dans ce référentiel est égale au moment en A de la somme des forces extérieures $\vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}}$ agissant sur M :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{M}/\{\mathrm{A},\mathcal{R}\}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}}/\mathrm{A}}$$

Démonstration

Appliquons l'opérateur $\overrightarrow{AM}\wedge$ à gauche et à droite de l'équation du PFD (appliqué au point matériel M dans un référentiel galiléen) :

$$\overrightarrow{AM} \wedge \left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}}. \tag{2.1}$$

Le terme de droite correspond au moment en A des forces extérieures appliquées sur le point matériel. Montrons que celui de gauche correspond à la dérivée du moment cinétique par rapport au point A :

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{M}/\{\mathrm{A},\mathcal{R}\}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}\right)\right|_{\mathcal{R}} \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Comme A est fixe dans le référentiel, $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$. Par définition $\vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}} = m\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$. Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires étant égal au vecteur nul, le théorème se déduit des équations (2.1) et (2.2).

Exercice 20.4

Comment est modifié le théorème dans le cas où A n'est pas un point fixe ?
Appliquer le théorème du moment cinétique dans le cas du pendule simple. Vérifier votre résultat à l'aide du théorème de l'énergie mécanique et du PFD.

Propriété 1 - Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe

Soit $\Delta = (A,u_\Delta)$ un axe **fixe** par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Soit M un point matériel. Le théorème du moment cinétique projeté sur cet axe et appliqué au point matériel s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{\vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}}/\Delta}.$$

Démonstration

Projeter le TMC sur l'axe Δ par l'intermédiaire du vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$. Démontrer que le terme de gauche s'identifie à celui de la propriété en utilisant le fait que l'axe est fixe par rapport au référentiel, soit $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\Delta}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$, et en utilisant la définition du moment cinétique scalaire.

Cette propriété nécessite beaucoup d'hypothèses (ref galiléen, axe fixe par rapport au ref et passant par son origine). Nous resterons dans ce cadre d'étude pour étendre le théorème à l'étude d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

3 Théorème du moment cinétique sur un ensemble de points matériels

Définition 5 - Moment d'un ensemble de points

Le moment cinétique d'un ensemble de points est la somme des moments cinétiques de chacun de ces points. Idem pour les moments des forces appliquées sur un ensemble de points.

Remarque : Les notations deviennent vite lourdes si on inclue l'ensemble des points matériels considérés. On écrira $\mathcal{S}$ le système de points matériels et les moments d'un ensemble sera noté de la même manière que pour un point matériel, en remplaçant M par $\mathcal{S}$.

3.1 Cas de deux points matériels

Définition 6 - Force centrale

Force qui peut se mettre dans une base sphérique sous la forme $f(r)\vec{e}_r$.

Remarque : L'interaction gravitationnelle et électrostatique peuvent être mises sous la forme d'une force centrale (force en $1/r^2$).

Exercice 20.5 - Mouvement d'un système à deux points matériel isolé

Dans le cas d'une interaction quelconque entre deux points matériels M_1 et M_2 isolé, les forces $\vec{F}_{\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2}$ et $\vec{F}_{\mathrm{M}_2\to\mathrm{M}_1}$ sont opposées et dirigées selon l'axe $(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)$ d'après la troisième loi de Newton (le référentiel d'étude est donc galiléen). C'est le cas des forces centrales par exemple.

1. Montrer que le moment de ces forces calculées en M_1, M_2 ou en G (centre de masse) est nul.
2. En déduire via le TMC que le moment cinétique est conservé pour chacun des points matériels et pour l'ensemble.
3. En déduire que le mouvement des deux points matériels est plan.
4. En choisissant un repère constitué du centre de masse [a] pour origine et d'une base cylindrique, exprimer le moment cinétique de chaque points matériels en utilisant les coordonnées cylindriques r,θ.
   Indication : sachant que le mouvement est plan, on choisit les axes pour étudier le mouvement dans le plan $z = 0$, ce qui élimine une variable (cf chapitre cinématique pour le choix du repère).
   Solution : On obtient (en faisant un schéma approprié !) $\vec{L}_{\mathrm{M}_1/\{\mathrm{O},\mathcal{R}\}} = m_1 r_1^2\dot{\theta}_1\vec{e}_z$ et $\vec{L}_{\mathrm{M}_2/\{\mathrm{O},\mathcal{R}\}} = m_2 r_2^2\dot{\theta}_2\vec{e}_z$.
5. En déduire que les quantités $\left\|\vec{L}_{\mathrm{M}_i/\{\mathrm{O},\mathcal{R}\}}\right\|/m_i$ sont des constantes.
6. Pourquoi cette constante est appelée constante des aires ? En déduire la deuxième loi de Kepler : des aires égales sont parcourues en des temps égaux. **Solution :** Aire d'un parallélogramme $\|\vec{r}\wedge \mathrm{d}\vec{r}\| = C\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}\mathcal{A}$.
7. Retrouvez l'expression de l'énergie mécanique d'un des deux points matériels dans le cas d'un interaction gravitationnelle sous la forme :
   $$E_{m_i} = \frac{1}{2}m_i\dot{r}_i^2 + \frac{m_i C^2}{2r_i^2} - \frac{Gm_1m_2}{r_1+r_2}$$
   Interprétez chacun des termes et identifiez l'énergie potentielle effective perçue par chacune des deux masses.
8. Expliquez en quoi une approximation du type $r_1 \ll r_2$ peut réduire le problème à une dimension. Relier cette condition aux masses des deux points matériels.

a. N'importe quel point de l'axe $(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)$ peut convenir.

Définition 7 - Couple de force

On nomme couple un système de forces dont la résultante est nulle mais dont le moment résultant en un point A quelconque est non nul.

Propriété 2 - Couple de force sur deux points matériels

Soit un système $\mathcal{S} = \{\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2\}$ composé de deux points matériels. Soit deux forces s'appliquant l'une sur M_1 notée $\vec{F}_{\rightarrow \mathrm{M}_1}$ et l'autre sur M_2 notée $\vec{F}_{\rightarrow \mathrm{M}_2}$, vérifiant[a] $\vec{F}_{\rightarrow \mathrm{M}_1} = -\vec{F}_{\rightarrow \mathrm{M}_2}$. Le moment résultant en A des forces exercées sur $\mathcal{S}$ est indépendant du point A. Il sera noté $\vec{\Gamma}$.

a. ⚠Attention à ne pas confondre avec la 3^{eme} loi de Newton, ces forces ne sont pas forcément colinéaires à l'axe (M_1M_2). D'ailleurs si elles le sont, le couple est nul.

Démonstration : A faire en tant qu'exercice.

3.2 Moment des forces internes à un système de points matériels

Pour un ensemble de points matériels $\{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, ..., \mathrm{M}_\mathrm{n}\}$, les forces exercées sur un point M_i sont classées en deux cathégories : la somme des forces extérieures $\vec{F}_{\mathrm{ext}\rightarrow \mathrm{M}_\mathrm{i}}$ et les forces internes au système crées par les autres points matériels M_j sur M_i : $\vec{F}_{\mathrm{int}\rightarrow \mathrm{M}_\mathrm{i}} = \sum\limits_{j\neq i}^{n} \vec{F}_{\mathrm{M}_\mathrm{j}\rightarrow \mathrm{M}_\mathrm{i}}$.

Nous pouvons appliquer ce que nous venons de voir à l'exercice précédent sur un ensemble de points matériels. Il en découle le théorème du moment cinétique appliqué à un système fermé (solide indéformable ou non) :

Théorème du moment cinétique appliqué à un système fermé

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ **galiléen**, la dérivée du moment cinétique d'un système **fermé** $\mathcal{S}$ **par rapport à un point fixe A** de ce référentiel est égale au moment en A des forces extérieures $\overrightarrow{F}_{\mathrm{ext}\rightarrow\mathcal{S}}$ agissant sur ce système :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathcal{S}/\{\mathrm{A},\mathcal{R}\}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F}_{\mathrm{ext}\rightarrow\mathcal{S}}/\mathrm{A}}$$

Démonstration

Sommer les moments des forces agissant sur chaque point matériel M_i fait apparaître deux termes, le premier est le membre de droite de l'équation, le deuxième est nul :

$$\begin{aligned}
\sum_i^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{\mathrm{int}\rightarrow \mathrm{M}_\mathrm{i}} &= \sum_i^n \sum_{j\neq i}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{\mathrm{M}_\mathrm{j}\rightarrow \mathrm{M}_\mathrm{i}} \\
&= \sum_{j<i}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{\mathrm{M}_\mathrm{j}\rightarrow \mathrm{M}_\mathrm{i}} + \sum_{j>i}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{\mathrm{M}_\mathrm{j}\rightarrow \mathrm{M}_\mathrm{i}} \\
&= \sum_{j<i}^n \left(\overrightarrow{AM_j} + \overrightarrow{M_jM_i}\right) \wedge \left(-\vec{F}_{\mathrm{M}_\mathrm{i}\rightarrow \mathrm{M}_\mathrm{j}}\right) + \sum_{j>i}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{\mathrm{M}_\mathrm{j}\rightarrow \mathrm{M}_\mathrm{i}} \quad && \text{3ème loi de Newton + Chasles} \\
&= \sum_{j<i}^n \overrightarrow{AM_j} \wedge \left(-\vec{F}_{\mathrm{M}_\mathrm{i}\rightarrow \mathrm{M}_\mathrm{j}}\right) + \sum_{j>i}^n \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_{\mathrm{M}_\mathrm{j}\rightarrow \mathrm{M}_\mathrm{i}} && \overrightarrow{M_jM_i} \perp \vec{F}_{\mathrm{M}_\mathrm{j}\rightarrow \mathrm{M}_\mathrm{i}} \\
&= \vec{0} \quad \text{par changement d'indice}
\end{aligned}$$

Remarque : Noter que les forces intérieures au système n'interviennent pas dans ce théorème et que la résultante des forces extérieures peut être nulle sans pour autant que le moment associé le soit : un couple peut être exercé sur le système, ce qui le mettra en rotation sans pour autant communiquer un mouvement au centre de masse (cf théorème de la résultante cinétique).

Théorème du moment cinétique scalaire appliqué à un système fermé

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ **galiléen**, la dérivée du moment cinétique **scalaire** notée L_Δ d'un système **fermé** $\mathcal{S}$ **par rapport à un fixe** $\Delta = (A,\vec{u}_\Delta)$ de ce référentiel est égale au moment **scalaire** par rapport à Δ des forces extérieures $\vec{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}}$ agissant sur ce système :

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\vec{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}}/\Delta}$$

Démonstration : même raisonnement que pour établir le théorème du moment cinétique scalaire appliqué à un point matériel.

Exercice 20.6 - Translation d'un ensemble de points matériels

Soit un système fermé $\mathcal{S} = \{M_i; i \in [1,N]\}$ constitué d'un ensemble de points matériels et G le centre de masse du système. On peut montrer (question complémentaire) la propriété suivante :

$$\vec{L}_{\mathcal{S}/\{O,\mathcal{R}\}} = \vec{L}_{G/\{O,\mathcal{R}\}} + \vec{L}_{\mathcal{S}/\{G,\mathcal{R}\}}. \tag{3.1}$$

Etudions le cas où les points matériels sont en translation les uns par rapport aux autres dans un référentiel d'étude $\mathcal{R}$.

1. Traduire sous forme mathématique la condition de translation en reliant les vecteurs position de deux points quelconques. Peut-on considérer cet ensemble comme un solide **Solution :** $\overrightarrow{\mathrm{OM}}_i = \overrightarrow{\mathrm{M_jM_i}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}_j$ avec $\overrightarrow{\mathrm{M_jM_i}}$ est fixe dans $\mathcal{R}$. L'ensemble peut être considéré comme un solide car la distance entre points matériels est fixe (**norme** du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M_jM_i}}$ constant).
2. En déduire la relation entre vecteur vitesse des différents points matériels. **Solution :** $\dot{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}_i = \dot{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}_j$
3. En utilisant le résultat précédent et la propriété que vérifie le centre de masse, montrer que $\forall i$, $\dot{\overrightarrow{\mathrm{GM}}}_\mathrm{i} = \vec{0}$.
4. Injecter ce résultat dans la propriété (3.1). Commenter. **Commentaire :** il est intéressant de noter que pour un système de points matériels en translation, celui-ci peut être réduit à un point matériel qui serait son centre de masse.

3.3 Solide en rotation autour d'un axe fixe

Segmenter un solide indéformable en volume élémentaire de masse $\mathrm{d}m(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V(\vec{r})$ revient à le traiter comme un ensemble de points matériels. Les théorèmes établis précédemment peuvent alors être appliqués aux solides et rend possible la description de leur mouvement.

Définition 8 - Liaison pivot

Un solide est en liaison pivot autour d'un axe fixe Δ s'il est **astreint à une rotation** autour de cet axe, **tout en empêchant une translation** le long de ce dernier. La liaison pivot est dite **parfaite** si le moment par rapport à Δ due à celle-ci est nul.

Propriété 3 - Moment d'inertie d'un solide

Le moment cinétique **scalaire** d'un solide **indéformable** en liaison pivot autour d'un axe Δ fixe par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ est le produit d'une constante J_Δ, appelé **moment d'inertie** du solide par rapport à l'axe Δ, et de la vitesse angulaire de rotation ω du solide autour de cet axe :

$$L_\Delta = J_\Delta\omega.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} L_\Delta &= \left(\int_{\mathcal{S}} \overrightarrow{AM} \wedge \dot{\overrightarrow{OM}}\, \mathrm{d}m(\overrightarrow{OM})\right) \cdot \vec{u}_\Delta \\ &= \left(\int_{\mathcal{S}} r^2\, \mathrm{d}m(r,\theta,z)\right) \dot{\theta}\vec{u}_\Delta \cdot \vec{u}_\Delta \quad \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= J_\Delta \omega \end{aligned}$$

Remarque : On utilise l'expression $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$ lorsqu'on étudie un ensemble de points matériels de masse m_i à une distance r_i de l'axe Δ. Lorsque l'on passe au cas du solide, la sommation n'est plus discrète mais continue, ce qui revient à poser l'intégrale sur un élément de volume pondéré par la masse volumique locale.

Exemple

On peut calculer à la main le moment d'inertie pour des solides indéformables et homogènes ayant des géométries simples : une tige de longueur ℓ de masse m. Son moment d'inertie J_{Δ_1} par rapport à un axe Δ_1 (fixe dans un référentiel d'étude) passant par le centre et perpendiculaire à la tige vérifie :

$$J_{\Delta_1} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} r^2 \left(\frac{m}{\ell}\, \mathrm{d}r\right) = \frac{m\ell^2}{12}.$$

En prenant un axe Δ_2 passant par une des extrémités de la tige on obtient :

$$J_{\Delta_2} = \int_0^{\ell} r^2 \left(\frac{m}{\ell}\, \mathrm{d}r\right) = \frac{m\ell^2}{3}.$$

Pour le moment cinétique d'un cylindre (ou d'un disque) de masse volumique homogène, de hauteur H et de rayon R par rapport à son axe de révolution Δ :

$$J_\Delta = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{H} r^2 \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{R}^2\mathrm{H}} r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}z\right) = \frac{mR^2}{4}.$$

3.4 Applications

Pendule pesant

Exercice 20.7

Soit un pendule constitué d'une tige homogène de masse m et de longueur ℓ en liaison pivot parfaite autour d'un axe $\Delta = \{O,\vec{u}_\Delta\}$ située à l'une de ses extrémités. On choisit un repère cylindrique constitué d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ ayant pour origine O, et d'une b.o.n.d. cylindrique $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\Delta)$. Le poids est la seule force s'exerçant sur la tige.

1. En segmentant la tige en volumes élémentaires, montrer que le moment total en O exercé par le poids sur la tige est égal au moment en O exercé sur le point matériel G, centre de masse de la tige de masse m.
2. Appliquer le TMC scalaire sur le pendule pesant pour décrire son mouvement. Donner l'expression de la pulsation de l'oscillation aux petits angles.

On ajoute une solide de masse M à une distance d de la liaison pivot sur la tige

3. Quelle type de mouvement doit vérifier ce solide pour ne considérer que le moment d'inertie de son centre de masse ? En déduire le type de liaison entre cette masse et la tige. **Indication :** Utiliser les résultats de l'exercice 20.6.
4. En supposant la condition précédente vérifiée, en déduire l'expression de la pulsation pour des faibles angles.
5. En supposant cette fois que la condition n'est pas vérifiée, en déduire l'expression de la pulsation pour des faibles angles.
6. Discuter des trois expressions de pulsations obtenues : dans quels cas peut-on considéré un pendule pesant comme un pendule simple ?

Moteur

Exercice 20.8

Γ couple exercé par un stator sur un rotor. Si le stator est fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$, quel couple est exercé par le rotor sur le stator et comment tenir compte de la réaction du support exercé sur le stator ?

4 Approche énergétique et dynamique d'un ensemble de points matériels

Pour passer du TMC sur un point matériel à un système fermé contenant des points matériels, nous avons dû :

— Définir les moments d'ensemble

— Appliquer le TMC sur chaque point matériel pour obtenir un TMC sur un ensemble.

Nous avons vu que les forces internes à l'ensemble n'apparaissait pas dans le TMC (point clef de la démonstration du TMC sur un ensemble).

Nous pouvons appliquer la même démarche en ce qui concerne le PFD et le TEC ou TEM. La quantité de mouvement (resp. l'énergie) d'un ensemble étant la somme des qdm (resp. des énergies) des parties de cet ensemble, passons directement aux théorèmes :

Théorème de la résultante cinétique sur un système fermé

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ **galiléen**, la dérivée du vecteur quantité de mouvement noté $\vec{P}$ d'un système **fermé** $\mathcal{S}$ est égale à la résultante des forces extérieures $\overrightarrow{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}}$ agissant sur ce système :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}}$$

Démonstration : Les forces intérieures n'interviennent pas puisqu'elles sont opposées deux à deux dans le système fermé (3ème loi de Newton).
Remarque : La quantité de mouvement de l'ensemble étant la somme des quantité de mouvement individuels, il en résulte que l'ensemble est assimilable à un point matériel du point de vu de ce théorème : le centre de masse du système (de masse égal à la somme des masses du système).

Théorème de l'énergie cinétique sur un système fermé

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ **galiléen**, la variation de l'énergie cinétique ΔE_c d'un système **fermé** $\mathcal{S}$ entre deux instants est égale au travail des forces extérieures W_{ext} **et intérieures** W_{int} agissant sur ce système :

$$\Delta E_c = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$$

Les autres théorèmes sur la puissance cinétique et sur l'énergie mécanique d'un ensemble de points matériels découlent de ce théorème.

Propriété 4

Le travail des forces intérieures d'un solide indéformable est nul.

Démonstration

Formule de Bour :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}.$$

Les puissances interne sont les sommes sur i et j tel que i<j (indices des points matériels) des puissances $\mathcal{P}_{i,j/\mathcal{R}} = \vec{F}_{\mathrm{M_j \to M_i}} \cdot \left(\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} - \vec{v}_{M_j/\mathcal{R}}\right)$. Dans un autre référentiel $\mathcal{R}'$, d'après la formule de Bour, on obtient que $\mathcal{P}_{i,j/\mathcal{R}'} = \mathcal{P}_{i,j/\mathcal{R}} + \vec{F}_{\mathrm{M_j \to M_i}} \cdot \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{M_iM_j}\right)$. Par invariance du produit mixte à une permutation circulaire et comme $\overrightarrow{M_iM_j} \wedge \vec{F}_{\mathrm{M_j \to M_i}} = \vec{0}$ on obtient le résultat suivant :

$$\forall \mathcal{R}', \quad \mathcal{P}_{\text{int}/\mathcal{R}'} = \mathcal{P}_{\text{int}/\mathcal{R}}. \tag{4.1}$$

La puissance des forces internes est indépendante du référentiel d'étude. Pour un solide indéformable, on peut trouver un référentiel (galiléen ou non !) dans lequel les points du solide sont fixes, la puissance des forces internes d'un solide est donc nulle dans ce référentiel et par extension via la propriété (4.1), dans tout référentiel.

4.1 Solide en rotation selon une liaison pivot

Pour un solide (indéformable) en rotation selon une liaison pivot dont l'axe est noté $\Delta = (A, \vec{u}_\Delta)$, en choisissant un repère cylindre $(O; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\Delta)$ nous pouvons attribuer une vitesse à chaque volume élémentaire du solide ne dépendant que de sa distance par rapport à l'axe (chapitre cinématique) : $\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = r_i\dot{\theta}$ où $\omega = \dot{\theta}$ est indépendant du point considéré (propriété des rotations). L'énergie cinétique de ce point matériel serait de $m_i(r_i\dot{\theta}_i)^2/2$. L'énergie cinétique du solide correspond à intégrer cette expression sur le volume du solide soit :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}} \rho(\vec{r})(r\dot{\theta})^2 \, \mathrm{d}V(\vec{r}) \\ E_c &= \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Soit l'ensemble des forces extérieures appliquées sur un point matériel M_i du solide noté $\vec{F}_{\mathrm{ext \to M_i}}$. La puissance des forces extérieures sur le solide s'exprime comme l'intégrale du terme $\vec{F}_{\mathrm{ext \to M_i}} \cdot \vec{v}_{M_i}$ sur l'ensemble du solide soit :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{F}_{\mathrm{ext \to M(\vec{r})}} \cdot r\omega\vec{u}_\theta \, \mathrm{d}V(\vec{r}) \tag{4.3}$$

Or le moment scalaire selon Δ des forces extérieures appliquées au solide s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\vec{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}}/\Delta} &= \int_{\mathcal{S}} \left((r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge \vec{F}_{\mathrm{ext \to M(\vec{r})}}\right) \cdot \vec{u}_\Delta \, \mathrm{d}V(\vec{r}) \\ &= \int_{\mathcal{S}} (\vec{u}_\Delta \wedge (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z)) \cdot \vec{F}_{\mathrm{ext \to M(\vec{r})}} \, \mathrm{d}V(\vec{r}) && \text{propriété du produit mixte} \\ &= \frac{\mathcal{P}_{\text{ext}}}{\omega} && \text{en utilisant } \vec{u}_\Delta \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_\theta \text{ et } \vec{u}_\Delta \wedge \vec{u}_z = \vec{0} \text{ et l'expression (4.3)} \end{aligned}$$

On obtient une relation simple entre la puissance des forces extérieures appliquées au solide en rotation et le moment dess forces extérieures :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \omega \mathcal{M}_{\vec{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}}/\Delta} \tag{4.4}$$

D'après les relations (4.2) et (4.4), nous pouvons établir l'équivalence entre le théorème du moment cinétique scalaire et le théorème de la puissance cinétique pour $\omega \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{\vec{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}}/\Delta} \qquad \overrightarrow{\times\omega} \qquad \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext}} \tag{4.5}$$

Remarque : On peut aisément passer du TMC au TPC par une simple multiplication. Cela permet de raisonner sur les moments ou les énergies assez facilement.

Exercice 20.9

Un moteur est composé d'une partie fixe (stator) et d'une partie mobile (rotor). Le système rotor + stator est considéré comme étant isolé. Nous considérons le rotor comme un solide indéformable en liaison pivot autour d'un axe fixe Δ dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen de moment d'inertie J_Δ. Le stator exerce sur le rotor un couple Γ_Δ.

1. En supposant dans un premier temps la liaison pivot comme parfaite, relier $\mathcal{M}_{\vec{F}_{\text{ext}\to\text{Rotor}}/\Delta}$ le moment scalaire des forces extérieures appliqué au rotor par rapport à l'axe Δ en fonction du couple Γ_Δ.
2. En déduire l'expression de la puissance communiqué par le stator au rotor en fonction de Γ_Δ et ω.
3. Le moteur électrique de la voiture ZOE développe une puissance de 100 kW (135 cv). Calculer le couple exercé par ce moteur en régime moyen de 4500 tr/min. (Le couple est situé aux alentours des 100 à 300 N.m pour les voitures.)

4.2 Système quelconque en rotation selon une liaison pivot

Si le système **n'est plus un solide indéformable** mais un ensemble fermé quelconque de points matériels, le TMC scalaire **n'est plus équivalent** au théorème de la puissance cinétique. Nous allons le voir dans l'exemple qui suit.

Exemple

Prenons l'exemple d'une personne assise sur un tabouret et tenant des masses à bout de bras. Cliquez sur ce lien pour voir l'expérience. Le système d'étude est le système $\mathcal{S} = \{$ce qui est posé sur le tabouret + parties mobile du tabouret$\}$ et l'axe fixe noté Δ sera l'axe de rotation du tabouret. Pour simplifier l'étude du système, nous posons les hypothèses suivantes :

1. Référentiel $\mathcal{R}$ terrestre supposé galiléen
2. Axe Δ fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$
3. Système $\mathcal{S}$ fermé
4. Tout frottement est négligé (équivaux à une liaison pivot parfaite et pas de frottements dans l'air)
5. Axe du tabouret vertical

Les hypothèses de 1, 2 et 3 permettent d'appliquer le TMC scalaire à un système fermé. Les hypothèses 4 et 5 permettent d'affirmer qu'il n'y a pas de moments scalaires extérieurs exercés sur le système : premièrement car la réaction de la partie fixe du tabouret est opposée au poids du système et ces deux forces sont confondus avec l'axe de rotation, deuxièmement car il n'y a pas de couple exercé sur la liaison pivot (pas de frottements). Ces éléments réunis, on a l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = 0$$

Ce qui veut dire physiquement que **le moment cinétique du système est conservé**. Peu importe si la personne tend ses bras ou les replient, le moment cinétique de l'ensemble est conservé.

A partir de cette conservation, nous allons montrer un phénomène qui se produit aussi lors de figures exécutées en patinage artistique : replier son corps le long de l'axe de rotation permet d'augmenter sa vitesse de rotation et inversement.

Toujours dans un souci de simplification, nous allons réduire l'étude du système à deux cas :

— Cas a), la personne tiens des masses en tendant ses bras perpendiculairement à l'axe Δ et opposés entre eux.

— Cas b), la personne tiens les masses proche de l'axe avec ses bras repliés.

La situation étant figée (la personne ne bouge pas, bras repliés ou bras tendus), le système entier **peut être considéré comme un solide indéformable**, de moment d'inertie $J_{\Delta,a}$ et de vitesse angulaire ω_a dans le cas a), et de moment d'inertie $J_{\Delta,b}$ et de vitesse angulaire ω_b dans le cas b).

Le moment d'inertie étant du type "$\sum_i m_i r_i^2$" pour chaque point matériel (m_i sa masse et r_i sa distance à l'axe), on se doute que le moment d'inertie du cas a) est plus élevé que dans le cas b) (les masses étant situées plus loin de l'axe de rotation dans le cas a)). On a donc $J_{\Delta,a} > J_{\Delta,b}$.

Comme le moment cinétique est conservé, on obtient l'égalité suivante $J_{\Delta,a}\omega_a = J_{\Delta,b}\omega_b$ qui couplée avec l'inégalité précédente donne le résultat physique :

$$\omega_a < \omega_b.$$

La vitesse de rotation est plus faible lorsque la personne à ses bras tendus que lorsqu'elle a ses bras repliés : c'est le phénomène visible sur la vidéo qu'on vient de démontrer.

Concernant l'énergie cinétique du système, le théorème qui peut être utilisé pour calculer sa variation est le TEC appliqué à un ensemble de points matériels. Appliquer ce théorème entre les cas a) et b) n'est pas équivalent à appliquer le TMC : le système **n'est pas** un solide indéformable (la personne bouge), et le travail (ou la puissance si on considère le TPC) des forces intérieures est non nul ! C'est effectivement visible car l'énergie cinétique du système dans le cas a) est différent du cas b) d'après les relations précédentes :

$$E_{c,a} = \frac{1}{2} J_{\Delta,a} \omega_a^2 \neq \frac{1}{2} J_{\Delta,b} \omega_b^2 = E_{c,b}$$

Donc d'après le TEC appliqué au système évoluant du cas a) au cas b), comme le travail des forces extérieures est nul et que la variation d'énergie cinétique ne l'est pas, le travail des forces intérieures est non nulle :

$$E_{c,b} - E_{c,a} = W_{\text{int}} \neq 0.$$

On sait même que la personne sur le tabouret doit fournir du travail ($W_{\text{int}} > 0$) pour passer des bras tendus (cas a)) aux bras repliés (cas b)).