Chapitre 18 # Introduction à la mécanique Newtonienne

1 Introduction

Newton est né en Angleterre en 1642 et a fait ses études à Cambridge, sans être un étudiant particulièrement remarqué. Il devient assistant à Trinity College en 1667, et à cette époque on enseignait la physique Cartésienne. Cette conception tout à fait nouvelle du monde était encore à peine tolérée. De manière simplifiée, Descartes défendait l'idée d'un monde entièrement mécanique, géométrique. Seule la matière en mouvement le constituait. Descartes a même proposé un modèle de formation du système solaire, plus tard corrigé par Kant, mais qui préfigure les modèles modernes. Même si le système cartésien n'était pas performant en termes de prévisions, car il était avant tout descriptif et qualitatif, avec la pensée cartésienne était née l'idée que le monde est intelligible et que c'est par les sciences mathématiques que nous pourrons le comprendre.

Newton commença par travailler sur le modèle d'orbites planétaires, proposé par Descartes, qui expliquait qualitativement le mouvement circulaire des planètes comme un équilibre entre une force attractive vers le Soleil et une force répulsive, par analogie avec une pierre qui tourne attachée par une corde à un axe. Nous savons aujourd'hui que cette force répulsive, dite "centrifuge" est en fait une force inertielle, c'est à dire, une conséquence du changement de repère (ici repère tournant), elle n'est en rien liée à la gravitation. C'est cependant en suivant cette idée un peu fausse d'une force répulsive que le physicien anglais Robert Hook aura le premier l'idée d'une force en $1/r^2$, mais ce sera Newton qui saura en exploiter les conséquences et comprendre le mouvement des planètes. Le physicien Huygens avait calculé la force dirigée vers l'extérieur qui s'exerce sur une pierre qui tourne autour d'un axe. Il avait montré que cette force était proportionnelle au carré de la vitesse, divisé par le rayon : v^2/r. Sur la base de cette idée, Hook a voulu calculer ce que cela donnait pour une planète : on sait par la troisième loi de Kepler que le carré de la période de révolution d'une planète (autour du soleil) est proportionnel au cube du rayon de son orbite : kr^3.

Cependant, si on suppose que l'orbite est circulaire et que la vitesse v est constante, cette période de révolution est aussi égale à $2\pi r/v$, on peut donc écrire : $2\pi r/v = kr^3$, ce qui implique que la force centrifuge est $v^2/r = 1/kr^2$, qui est inversement proportionnelle au carré de la distance. Donc, si on fait l'hypothèse (en fait fausse, mais c'est ce que l'on croyait à l'époque) que l'on est à l'équilibre mécanique, la force attractive, doit être aussi en $1/r^2$, pour que la somme des deux s'annule. En fait, l'objet n'est pas à l'équilibre mécanique. L'erreur faite ici est d'oublier de considérer le principe d'inertie, établi par Galilée.

En 1679, alors que Newton se débattait encore avec la théorie cartésienne des forces attractives et répulsives, il reçoit une lettre de Hook (avec lequel s'était déjà engagé une vive polémique sur la nature de la lumière) lui soumettant l'idée suivante : le mouvement circulaire des planètes pourrait sûrement s'expliquer comme la conséquence d'une unique force attractive en $1/r^2$ qui attire le corps vers le Soleil, mais le mouvement circulaire lui-même est la conséquence de la tendance du corps à conserver un mouvement rectiligne (conséquence du principe d'inertie). Ce mouvement rectiligne est à tout instant modifié par la force attractive et le bilan de ces deux effets est un mouvement circulaire.

Newton qui n'appréciait pas beaucoup Hook, lui proposa une solution mathématique, dans laquelle il fit une erreur, que Hook vit rapidement. Fatigué de ses disputes avec Newton, Hook abandonna finalement l'hypothèse. Cependant Newton, sans le faire savoir, résolut secrètement le problème. En réalité Newton alla beaucoup plus loin que le simple cas d'un mouvement circulaire, et ainsi développa sa théorie de la gravitation universelle et de la mécanique, qu'il publia en 1687 dans son ouvrage, les "principia".

Extrait du site : http://www.aim.ufr-physique.univ-paris7.fr/CHARNOZ/homepage/GRAVITATION/grav5.html

2 Lois de Newton

2.1 Première loi de Newton : principe d'inertie

Principe d'inertie (première loi de Newton)

Dans un référentiel dit galiléen ou inertiel, un point matériel ne subissant aucune interaction persiste dans son état initial (repos ou translation rectiligne uniforme).

Re-formulation du principe d'inertie : Un point matériel est en mouvement non rectiligne uniforme si et seulement si il subit une interaction (i.e. est soumis à une force).
Remarque : Le principe d'inertie sous-entend qu'un point matériel s'oppose naturellement à une modification de son mouvement : il faut agir sur lui pour le perturber, c'est l'inertie. Intuitivement plus un corps est massif plus il s'oppose à sa mise en mouvement.

Définition 1 - Système isolé et pseudo-isolé

Un système est isolé s'il n'est soumis à aucune force extérieure et pseudo-isolé si la somme des forces extérieures qui lui sont appliqué se compensent.

Un système isolé ou pseudo-isolé constitue un référentiel galiléen. Cependant, un système parfaitement isolé ou pseudo-isolé n'existe pas [1] : toute région de l'espace subit une interaction gravitationnelle [2]. Il faut comprendre cette définition d'un point de vue expérimental : un système est isolé ou pseudo-isolé si les grandeurs physiques étudiées propres a ce système varient sur une échelle de temps plus courte que celle liée aux interactions extérieures qu'il subit.

Définition 2 - Force

Action mécanique susceptible de modifier le mouvement d'un point matériel.

Remarque : Cet ensemble de définitions est un peu circulaire. La première loi de Newton nécessite un référentiel galiléen, qui se réfère à la notion de système isolé - isolé de quoi ? - de forces qui correspondent à une modification du mouvement d'un point matériel par rapport à son mouvement initial rectiligne uniforme : on retombe sur le principe d'inertie. On caractérise une force plus par le modèle qu'on en donne plutôt que par sa définition.

Propriété 1 - Modéliser une force

Une force se modélise par un vecteur $\vec{F}$ dont :

- ☆ la norme représente l'intensité de la force en Newton (1N = 1 $\mathrm{kg.m.s^{-2}}$),
- ☆ la direction représente la direction de la force,
- ☆ le sens représente le sens de la force,
- ☆ l'origine est le point d'application de la force.

Décrire une force consiste à énoncer ces quatre caractéristiques.

2.2 Deuxième loi de Newton

Définition 3 - Quantité de mouvement

On note $\vec{p}_{M/\mathcal{R}}$ le vecteur quantité de mouvement du point matériel M de masse m vérifiant :

$$\vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}.$$

On peut définir la quantité de mouvement d'un ensemble de points matériels et utiliser la notion de centre de masse :

Définition 4 - Centre d'inertie (centre de masse)

Barycentre d'un ensemble de points matériels pondéré par leurs masses. Soit G le centre de masse de N points matériels M_1, M_2, ..., M_N de masse respective $(m_1,m_2,...,m_N)$ alors le vecteur position $\overrightarrow{OG}$ vérifie :

$$m_{\text{tot}}\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM_i}.$$

G peut être vu comme un point matériel de masse $m_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} m_i$.

1. Un point de l'espace dont la somme des interactions gravitationnelles se compensent est une position instable.
2. Ces définitions ne sont pas "valables" ? Un cadre fictif n'est pas forcément un problème : si les résultats sont proches de la réalité, c'est que *a priori* le modèle et le cadre d'étude sont proches de la réalité. Le physicien doit, pour valider ces définitions, expliquer dans quelle mesure le cadre d'étude réel est proche du cadre fictif.

Remarque : On peut aussi écrire en utilisant la relation de Chasles que $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$.

Exercice 18.1

Pour deux points matériels M_1 et M_2 respectivement de masse m_1 et m_2, déterminer l'expression du vecteur impulsion du système constitué par l'ensemble des deux masses en utilisant le barycentre du système.

Remarque : On peut étendre cette notion de centre de masse à des solides qui ont un volume (contrairement aux points). On utilise pour cela un volume élémentaire noté $\mathrm{d}V$ appartenant au solide ayant une masse volumique ρ. Ce volume élémentaire peut être assimilé à un point matériel de masse $\rho\,\mathrm{d}V$. Ainsi, pour calculer la position du centre de masse d'un solide, on effectue une intégrale (plutôt qu'une somme) sur tout le volume qu'il occupe. On obtient :

$$\overrightarrow{OG} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \rho\vec{r}\,\mathrm{d}V.$$

Principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton)

Dans un référentiel supposé galiléen ou inertiel, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un point matériel dans ce référentiel est égal à la résultantes des forces extérieures notée $\vec{F}_{\text{ext}}$ appliquées sur celui-ci :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ext}}.$$

Remarques :

1. Si le système possède une masse constante (pas de désintégration radioactives par exemple), alors on retrouve la formule connue : $m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F}_{\text{ext}}$.
2. Le principe d'inertie est présent dans la deuxième loi de Newton : pour une résultante des forces nulle, le point matériel conserve un mouvement rectiligne uniforme (impulsion constante).

Exercice 18.2

Soit deux masses assimilables à des points matériels de masse m identiques reliées l'une à l'autre par un ressort de raideur k de masse négligeable. Ce système {masse 1 + ressort + masse 2} est lâché et tombe sous l'effet de son poids. Décrire la position du centre de masse du système au cours du temps dans le référentiel terrestre.

2.3 Troisième loi de Newton

Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques.

Soit deux points matériels M_1 et M_2. Si M_1 exerce une force sur M_2 notée $\vec{F}_{1\to 2}$ (le point d'application est donc en M_2) alors le point M_2 exerce une force de même direction, de sens opposé, de même norme et de point d'application M_1 notée $\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$.

Exercice 18.3

Un cube est placé sur un plan incliné (référentiel terrestre supposé galiléen, inclinaison par rapport au plan horizontal). On estime que le cube ne puisse pas se mettre à glisser avant de rouler. Calculer l'angle à partir duquel le cube se met à rouler sur le plan incliné.

3 Forces usuelles

Définition 5

On parle de force de contact ou à distance si les points d'application des forces sont en contact (ex : ressort sur masse) ou à distance (ex : force électrostatique).
On parle des forces localisées ou réparties si la force est localisé sur un point d'application ou modélisable comme tel (ex : tension d'un fil) ou répartie sur un ensemble de points (ex : pression exercée sur une table).

Remarque : Ce sont des définitions qui permettent de différencier les types de forces traitées dans ce chapitre. On gardera en tête toutefois que toute force est à distance (par l'intermédiaire de particules élémentaires d'interactions, les bosons), et est répartie (on simplifie l'étude en considérant que la force est localisée).

3.1 Force de rappel élastique

Système

Le système sera étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Celui-ci est composé d'une masse m attachée à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On suppose que la masse se déplace horizontalement sans frottements suivant l'axe O_x.
On notera ℓ la longueur du ressort, et $x = \ell - \ell_0$, l'élongation du ressort. La position du centre du solide suivant l'axe (O_x) est x car le solide est situé en **O** lorsque l'élongation du ressort vaut 0 (et que le solide est indéformable).

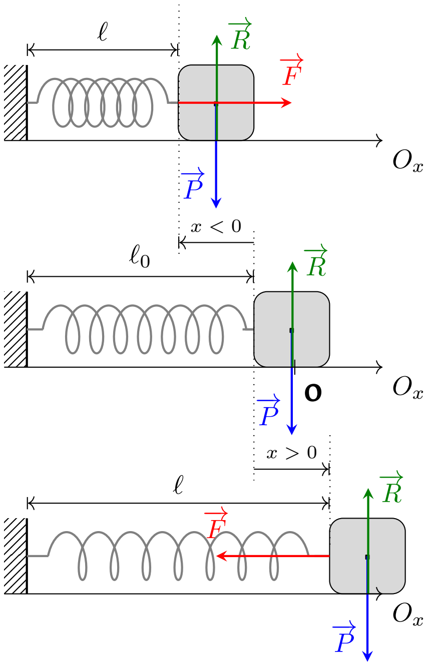

FIG. 18.1 – Schéma du système {masse + ressort} dans différentes configurations. De haut en bas : ressort comprimé, à l'équilibre et étiré.

Définition 6 - Elongation

L'élongation (ou l'allongement) d'un ressort correspond à la différence entre la longueur du ressort et sa longueur à vide.

Bilan des forces

- ☆ Le poids P = mg vertical et orienté vers le bas.
- ☆ La réaction vertical du support R, orienté vers le haut et compensant le poids.
- ☆ La force de rappel du ressort, horizontal et tendant à ramener le ressort à sa longueur au repos ℓ_0. Dans le domaine élastique du ressort elle s'exprime suivant la loi de Hooke.

Loi de Hooke

La force de rappel exercée à l'une des extrémité d'un ressort de raideur k, exprimé en N.m^{-1}, et de longueur à vide ℓ_0, s'exprime :

$$\vec{F} = k(\ell - \ell_0)\vec{u}$$

où ℓ est la longueur du ressort et $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de l'extrémité considérée vers celle qui lui est opposée.

Equation du mouvement

Le principe fondamental de la dynamique [3] appliqué à la masse m et projeté sur l'axe (O_x) conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0.} \tag{3.1}$$

3. Nous aborderons le principe fondamental de la dynamique plus en détail dans les chapitres suivants. Pour rappel, voici son énoncé lorsqu'il est appliqué à un objet ponctuel : le produit de la masse par l'accélération d'un objet ponctuel dans un référentiel Galiléen est égale à la somme des forces extérieures appliqué sur celui-ci.

L'élongation du ressort x vérifie donc l'équation de l'oscillateur harmonique sans second membre, avec la pulsation propre du système ω_0 qui vérifie [4] :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Nous pouvons alors modéliser ce système par un oscillateur harmonique ayant l'élongation du ressort comme grandeur physique associée.

Démonstration de l'équation (3.1)

Le PFD appliqué au solide donne l'équation (3.2). Comme la direction du poids et de la réaction du support sont perpendiculaires à l'axe (O_x), leurs projections sont nulles sur cet axe. La force de rappel du ressort est dirigée suivant ce même axe et sa valeur est donnée par la loi de Hooke. La projection de (3.2) sur l'axe (O_x) conduit à l'équation (3.3). Enfin, en passant la force à gauche du signe égal et en divisant le tout par m donne (3.1).

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} \quad (3.2)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{dt^2} = -kx \quad (3.3)$$

Exercice 18.4

Retrouver la loi du mouvement d'une masse se déplacement horizontalement et sans frottements dans le référentiel terrestre supposé galiléen, celle-ci étant accrochée à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On prendra comme système d'étude :

— Soit la masse seule.

— Soit la masse et le ressort.

Indice : On veillera dans chaque cas à bien représenter le point d'application des forces mises en jeu et à ne pas confondre les forces internes et externes au système d'étude. On notera que l'autre bout du ressort est attaché à un support fixe (par rapport au référentiel d'étude). On pourra utiliser la troisième loi de Newton et la loi de Hook pour déterminer la réaction du support.

3.2 La gravitation

Loi : Force de gravitation.

Soit deux points matériels M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2. Le point M_1 subit de la part du point M_2 une force d'expression :

$$\vec{F}_{2\to1} = \mathcal{G}\frac{m_1m_2}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^3}\overrightarrow{M_1M_2},$$

avec $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}\mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$ la constante de gravitation universelle.

ODG : $M_T = 5{,}9736.10^{24}$ kg, $M_S = 2.10^{30}$ kg, $M_L = 7.10^{22}$ kg, $d_{S,T} = 150.10^6$ km, $d_{L,T} = 380.10^3$ km, $F_{ST} = 4.10^{22}$ N , $F_{SL} = 4.10^{20}$ N, $F_{TL} = 4.10^{20}$ N.

Exercice 18.5

En comparant la chute de la Lune sur la Terre à celle d'un objet au sol, montrer comment Newton a pu en déduire qu'une force gravitationnelle en $1/r^2$ est compatible avec les données expérimentales de l'époque, et que cette force s'applique sur tout corps massifs (révolution de pensée pour l'époque : lien entre l'astronomie et les mouvements mécaniques terrestres).
Données de l'époque : distance terre/lune est d'environ 60 rayons terrestres, période rotation sidéral de la lune en 27 jours (période synodique de 29 jours), trajectoire balistique en $-0.5gt^2$ avec $g = 9.8\mathrm{m.s^{-2}}$.

4. Mathématiquement, $\omega_0 = \pm\sqrt{k/m}$.. On choisira par convention de traiter uniquement les pulsations et fréquences positives (les fréquences négatives n'ont pas vraiment de sens en physique) d'où le choix du signe +.

Exercice 18.6

1. Déterminer le centre de masse du système Terre-Lune et le situer.
2. Déterminer un jour sidéral (période de rotation de la terre par rapport à des étoiles fixes). Réponse : 23 h 56 min 4s.
3. Déterminer $\vec{g}$ avec la force de gravité, du rayon de la terre et de la question précédente.
4. Pèse-t'on plus lourd aux pôles ou à l'équateur ? Rayon équatorial : 6 378 km / Rayon polaire : 6 357 km.

3.3 Forces électromagnétiques

Forces électrostatiques

Propriété 2 - Loi de Coulomb

Soit deux points matériels M_1 et M_2 de charge respective q_1 et q_2. Le point M_1 subit de la part du point M_2 une force d'expression :

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \|\overrightarrow{M_1M_2}\|^3}\overrightarrow{M_1M_2},$$

avec $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$ la permittivité du vide.

Force de Lorentz : champ électrique seul

Propriété 3

Soit un champs électrique noté $\vec{E}$. Un point matériel chargé, de charge q, subit dans ce champs une force électrique vérifiant :

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E}.$$

Remarque : On peut identifier ce que vaut le champs électrique créé par un point matériel de charge q' avec la formule de la force électrostatique :

$$\vec{E} = -\frac{q'\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

avec $\vec{e}_r$ le vecteur unitaire en coordonnées sphériques centré autour du point matériel.

Force de Lorentz : champ magnétique seul

Propriété 4

Soit un champs magnétique noté $\vec{B}$. Un point matériel chargé, de charge q, subit dans ce champs une force vérifiant :

$$\vec{F}_{mag} = q\vec{v}\wedge\vec{B}.$$

Expérience (vidéo) : aimant proche d'un oscilloscope et d'une télévision à tube cathodique.

Exercice 18.7

Décrire la trajectoire d'une particule chargée dans un champ électrique et un champ magnétique uniforme.
Indice : rappelez-vous de la propriété sur la décomposition de l'accélération le long d'une trajectoire plane quelconque (chapitre 10).

Expérience (vidéo), force axiale : goutte d'eau dans l'espace autour d'une aiguille chargée.

3.4 Poussée d'Archimède et forces de pression

Propriété 5 - Poussée d'Archimède

Soit un système immergé dans un fluide au repos. La résultante des forces de pression s'appliquant au système est égale au poids de fluide déplacé et orientée vers le haut. Cette force s'applique en un point appelé le centre de poussé.

Remarque : Le centre de poussée n'est pas le centre de masse du système [5].

Exercice 18.8

Nous nous plaçons dans un référentiel terrestre supposé Galiléen.

1. Combien de ballons remplis d'hélium faut-il pour soulever une masse de 10 kg ? On négligera le poids les ballons d'hélium devant écelui de la masse.
2. On cherche à calculer la densité d'une sphère en bois. On la plonge dans l'eau et on remarque qu'elle reste à moitié immergée. Quelle est sa densité ?
3. En assimilant un iceberg à un cube, déterminer le ratio entre la partie visible et la partie immergée.
4. Péniche au gabarit Freyssinet : 5,20 m de large sur 39 m de long, capacité de 300 tonnes. Quelle est la variation du tirant d'eau de la péniche lorsqu'on la remplie ?

Données : $\rho_{\text{He}} = 0{,}18\,\text{g.L}^{-1}$, $\rho_{\text{Air}} = 22\,\text{g.L}^{-1}$, $\rho_{\text{Eau,l}} = 1\,\text{kg.L}^{-1}$, $\rho_{\text{Eau,s}} = 0{,}9\,\text{kg.L}^{-1}$ et $V_{\text{ballon}} = 3\,\text{L}$.

3.5 Forces de frottement fluide

Propriété 6 - Frottement fluide

Un système en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans un fluide subira une force de frottement fluide $\vec{f}$:

- ☆ Pour le faibles vitesse $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.
- ☆ Pour les fortes vitesse $\vec{f} = -\beta v\vec{v}$.

avec α et β des coefficients de frottements positifs dépendants du fluide, de la forme du solide, du régime de vitesse...

Exercice 18.9

Nous nous plaçons dans un référentiel terrestre supposé Galiléen.

1. Exprimer la vitesse limite d'une bille en chute libre dans le cas des faibles et fortes vitesses en fonction de sa masse et d'un coefficient de frottement.
2. Tracer l'allure du portrait de phase de la vitesse de la bille et retrouver graphiquement le résultat précédent.

3.6 Réaction d'un support solide et Tension

Ces forces sont spécifiques du système étudié et peuvent être calculées dans des cas précis par la troisième loi de Newton. La réaction d'un support sur un solide est souvent décomposée en une force normale et tangentielle à celui-ci et le point d'application dépendra de plusieurs paramètres dont la surface de contact. La tension peut être vu comme une force de réaction le long d'un fil (idéalisé de diamètre nul) est une force de réaction dirigée selon la tangente au fil.

5. Cette différence est très importe lors de la conception d'un navire : le ratio entre la taille de sa coque et la hauteur de son mat doit vérifier certaines conditions pour éviter de chavirer.

Exercice 18.10

Nous nous plaçons dans un référentiel terrestre supposé Galiléen.

1. Faire un bilan des forces d'un skieur sur un téléski à l'arrêt.
2. Un objet de masse m glisse sans frottements et sans vitesse initiale depuis le sommet d'un igloo assimilable à une demi-sphère de centre O et rayon R. On pourra repérer assimiler l'objet à un point matériel M et repérer sa position par un angle $\widehat{SOM}$ (S : sommet de l'igloo). Au cours de son mouvement, du fait de la "force" centrifuge, l'objet finit par ne plus toucher la surface de l'igloo : déterminer cet angle de décrochage.
3. Prenons un pendule au repos constitué d'un fil et d'une masse m. On donne un coup pour lui communiquer une vitesse initiale : pour quelle(s) vitesse(s) le fil n'est-il plus tendu à un instant donné du mouvement ?