Chapitre 21 Induction électromagnétique

1 Introduction à l'électromagnétisme

Diapositives et vidéos. Connaissances à retenir absolument pour débuter ce chapitre :

Définition 1 - Lignes de champ magnétique

Les lignes de champ magnétique sont tangentes en chaque point au vecteur champ magnétique.

Propriété 1

- ☆ Quand deux lignes de champ voisines s'éloignent l'une de l'autre, l'intensité du champ magnétique diminue.
- ☆ Le champ magnétique est uniforme si les lignes de champ sont parallèles
- ☆ Les lignes de champ d'un aimant sortent par sa face nord et rentrent par sa face sud.
- ☆ Deux lignes de champ magnétique ne peuvent se croiser qu'en un point où le champ est nul.

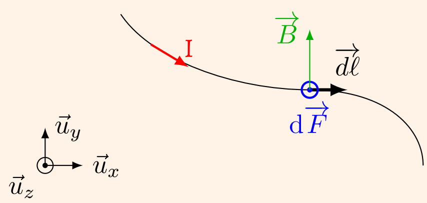
Convention 1 - Orientation des lignes de champ magnétique en fonction du courant

Les lignes de champ magnétique créées par des charges en mouvement dans un conducteur s'enroulent autour du conducteur selon la règle du tire-bouchon : le courant électrique est dans le sens obtenu en appliquant cette règle.

Propriété 2 - Force de Laplace

Soit $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ une b.o.n.d. comme représenté sur le schéma ci-contre. Soit un conducteur filiforme parcouru par un courant I et plongé dans un champ magnétique. Une force de Laplace apparaît sur un élément de longueur $d\ell$ du conducteur et vérifie :

$$d\vec{F} = I\vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$



Définition 2 - Moment magnétique

Grandeur caractérisant une source de champ magnétique. Pour une spire filiforme parcourue par un courant I et de surface orientée $\vec{S}$, ce moment vaut :

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

Propriété 3 - Moment résultant des forces de Laplace

Soit une source de champ magnétique ayant un moment magnétique $\vec{m}$ **plongé dans un champ magnétique uniforme** [a] $\vec{B}$, le moment résultant des forces de Laplace est un couple [b] vérifiant :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}.$$

a. Le texte en gras veut dire que le champ magnétique est égal en norme, en sens et en direction dans la zone où est situé la source.
b. Il est donc indépendant du point par rapport auquel le moment est calculé

2 Généralités sur l'induction électromagnétique

2.1 Additivité du champ magnétique

Les équations de Maxwell décrivant le comportement des champs électriques et magnétiques dans un milieu donné sont linéaires au regards de ces champs. Le principe de superposition, s'appliquant à tout système linéaire, permet d'affirmer que la somme de deux solutions est une solution. Le champ magnétique est **additif**. Par exemple le champ magnétique créé par deux aimant en un point correspond à la somme des champs magnétiques créés par chaque aimant pris indépendamment.

2.2 Force électromotrice

Définition 3 - Flux de champ magnétique

Le flux de champ magnétique à travers une **surface plane orientée** $\overrightarrow{S}$ plongé dans un champ magnétique uniforme est défini par :

$$\Phi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S}$$

Propriété 4

Pour une surface $\mathcal{S}$ et un champ magnétique quelconque, le flux de champ magnétique peut-être décomposé [a] en flux élémentaire sur une surface orientée élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$. Le flux total vérifie :

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

a. Le flux est une grandeur extensive, et une surface élémentaire peut être vue comme localement plane et plongée dans un champ magnétique uniforme.

Loi de Faraday

Soit Φ le flux de champ magnétique à travers un circuit fermé. La **force électromotrice induite** dans ce circuit notée e vérifie :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Définition 4 - Force électromotrice induite

La force électromotrice induite (abrégée f.é.m. induite) est causée par les déplacements de charge et/ou par les variations de champ magnétique à travers un circuit fermé. C'est la tension obtenue aux bornes du circuit s'il était ouvert [a]. Dans la plus-part des cas [b] **la loi de Faraday** permet de déterminer cette tension.

a. Ce n'est donc pas une force à proprement parler.

b. Les contre exemples à la loi de Faraday comme le cas de substitution de circuit (déformation discontinue d'un circuit) et d'induction unipolaire (phénomène rencontré lors de la rotation d'un aimant sur lui même) ne seront pas traités.

Exercice 21.1

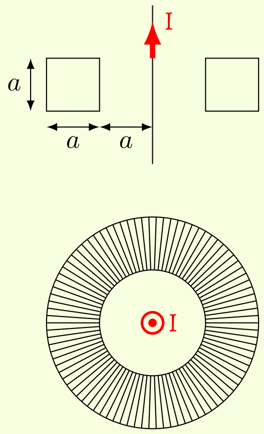
Soit un repère $\mathcal{R}(O;\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ associé à une base cylindrique. Un courant circulant dans un fil placé sur l'axe (Oz) créé dans le plan $(O;\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ un champ magnétique vérifiant :

$$\overrightarrow{B}(r,\theta,z) = \frac{\alpha}{r}\vec{u}_\theta,$$

avec α un réel positif. Une spire carré de côté de longueur a est placée dans le plan $(O;\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ avec deux de ses coins opposés situés à $(r,z) = (a,0)$ et $(r,z) = (2a,a)$.

1. Faire un schéma de la spire et du fil. Représenter l'allure des lignes de champs autour du fil. Comment doit-être orienté le courant pour satisfaire la condition $\alpha > 0$? *Conseil : deux représentations, une dans le plan $(O;\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ et l'autre dans le plan $(O;\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$, peut être utile à mieux visualiser pour l'un le champ magnétique, pour l'autre la spire.*
2. Déterminer l'expression du flux de champ magnétique à travers la surface délimitée par la spire.
3. Calculer le flux de champ magnétique à travers une spire carrée de a = 1 cm de côté avec $I = 1$ A et $\alpha = \mu_0 I/2\pi$.
4. Que vaut la force électromotrice induite dans la spire dans le cas où le courant circulant dans le fil est constant ?
5. Proposer une expression du courant et de la f.e.m. induite dans le cas d'un courant alternatif puis indiquer le sens du courant induit.

On se propose de modéliser une pince ampèremétrique (photo à droite) comme une bobine torique de section carrée de côté a équivalent à N spires carrées (vue en coupe et vue du dessus de haute en bas à gauche).



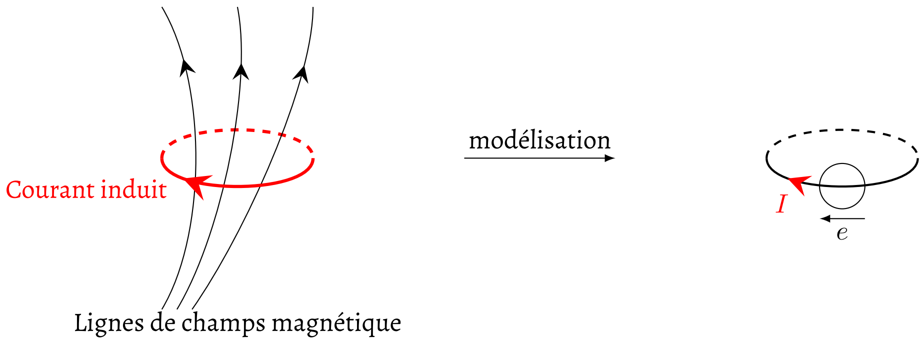
6. Exprimer le flux de champ magnétique à travers le tore.
7. Proposer un ordre de grandeur de la force électromotrice mesurable par une pince ampèremétrique dans une installation électrique standard.

On donne $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\,\mathrm{kg.m.A^{-2}.s^{-2}}$.

Remarques :

1. Si le champ magnétique vu par le conducteur est stationnaire (indépendant du temps), il n'apparaît pas de force électromotrice [1].
2. Le signe moins traduit une modération en lien avec la **loi de Lenz** : *l'induction, par ses effets, s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance*. En effet la f.é.m. induite va donner lieu à un courant qui lui même va générer un champ magnétique, s'opposant au flux de champ magnétique à l'origine de cette même f.é.m. induite.
3. Les effets du champs magnétique sur le circuit peuvent être simplement modélisés par l'apparition dans ce circuit d'un générateur de force électromotrice $e = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ comme schématisé ci-dessous.
4. Le sens des lignes de champ sur un schéma de ce type n'indique en rien dans quel sens circulera le courant induit. En effet la variation temporelle du champ magnétique peut être totalement indépendante de son sens et de sa direction [2]. Pour connaître le sens du Courant il faudra raisonner avec la loi de Lenz.
5. La f.é.m. induite est orienté dans le sens du courant, selon la **convention générateur**.

1. Hormis les cas particuliers d'induction unipolaire et de substitution de circuits.
2. Par exemple, au centre de bobines de Helmoltz, les lignes de champs sont parallèles entre elles et le restent quel que soit la valeur du champ magnétique.



Attention : Il ne faut pas confondre les lignes de champ magnétique causées par une distribution de courant ou un aimant et les lignes de champ magnétique causées par un courant induit, cela revient à confondre cause et conséquence. Sur le schéma ci-dessus, si l'orientation du courant ne respecte pas la règle du tire bouchon ce n'est pas en lien avec la remarque 4, cela provient du fait que ce n'est pas le courant induit qui est à l'origine de ces lignes de champs mais une source extérieure. Par exemple, en approchant un aimant d'une spire, un courant induit se met à circuler dans la spire. La représentation des lignes de champs qui est faite dans ce schéma correspond ici à celles provenant de l'aimant et pas celles provenant de la spire.

Exercice 21.2

Soit une spire fixe de surface S plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}(t)$ et orienté perpendiculairement à la surface S. Montrer que la f.é.m. induite dans la spire s'écrit, pour une orientation précise du champ (faire un schéma) :

$$e = -S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}.$$

2.3 Inductance propre et mutuelle

Un circuit parcouru par un courant I crée en tout point de l'espace un champ magnétique proportionnel à I. Le facteur de proportionnalité est lui-même relié à une longueur/distance et à la perméabilité du vide μ_0. Cette propriété peut se déduire de la loi de Biot et Savart ou des équations de Maxwell. Il vient que le flux de champ magnétique à travers le circuit créé par le courant est proportionnel au courant. On choisit d'appeler cette grandeur **inductance propre** :

Définition 5 - Inductance propre

Le flux de champ magnétique Φ_p créé par la circulation de courant I dans un circuit au travers de celui-ci est proportionnel à ce même courant (indice p pour «flux magnétique propre au circuit»). Le coefficient de proportionnalité est appelé inductance propre, souvent noté L ou L_p et exprimé en Henry (H) :

$$\Phi_p = L_p I.$$

Définition 6 - Inductance mutuelle

Soit deux circuits C_1 et C_2 respectivement parcourus par un courant I_1 et I_2. Soit Φ_{12} flux de champ magnétique au travers d'un circuit 1 créé par la circulation de courant I_2 dans le circuit 2. Ce flux est proportionnel au courant I_2. Le coefficient de proportionnalité est appelé inductance mutuelle, noté M_{12} et exprimé en Henry (H) :

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2.$$

Propriété 5

Soit deux circuits C_1 et C_2 respectivement parcourus par un courant I_1 et I_2 et d'inductance propre respective L_1 et L_2

- ⋆ L'inductance mutuelle entre le circuit 1 et 2 (M_{12}) est la même qu'entre le circuit 2 et 1 (M_{21}). L'inductance mutuelle se note simplement M.
- ⋆ L'inductance mutuelle entre circuits est inférieure à la moyenne géométrique des inductances propres de chaque circuit :

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

Exercice 21.3

Un générateur de tension sinusoïdal idéal $E = E_0 \cos(\omega t)$ est court-circuité par un fil. Un courant circule alors dans le circuit formé par le générateur et le fil, ce dernier étant modélisé comme une petite résistance R. L'inductance propre du circuit formé est noté L.

1. Exprimer le courant en fonction des grandeurs énoncées.
2. Exprimer le flux de champ magnétique en fonction des grandeurs énoncées.
3. Montrer à l'aide de la loi de Faraday que la force électromotrice auto-induite vérifie : $e = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$.
4. A quoi peut-on associer la caractéristique courant tension précédente ? Proposer une modélisation du circuit uniquement à partir de dipôles classiques (cf chapitre 6, lois des circuits).

Exemple

Déterminons l'inductance propre d'un solénoïde de longueur h grande devant son rayon R, et parcouru par un courant I. A l'intérieur du solénoïde, le champ magnétique est uniforme et vaut environ $B = \mu_0 n I$ où n est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. Le solénoïde comporte donc nh spires.
Le flux à travers à travers la surface orientée d'une spire (rappel : orientée en fonction du courant qui circule dans cette spire), vaut : $\mu_0 n I \times \pi R^2$. Multiplié par le nombre de spires [3], nous obtenons le flux Φ_p à travers l'ensemble du solénoïde :

$$\Phi_p \simeq \mu_0 n^2 h \pi R^2 I.$$

L'inductance propre est le facteur de proportionnalité entre le flux propre et le courant. Pour un solénoïde on a donc :

$$L \simeq \mu_0 n^2 h \pi R^2$$

Les bobines utilisées en TP font une dizaine de centimètres de long pour un rayon de 5 centimètres. Le fil utilisé peut varier entre 0.1 mm de diamètre et 1 mm de diamètre, le nombre de spires par unité de longueur est donc de 1 à 10 spires par milimètres (s'il n'y a qu'une seule couche !). Le calcul donne entre 1 et 10 mH (c'est effectivement l'ordre de grandeur des inductances des bobines de TP).

3 Induction de Neumann et de Lorentz

Il existe deux points de vue différents pour étudier les phénomènes d'induction :

- ☆ **Point de vue de Neumann :** Le conducteur est immobile dans un champ magnétique dépendant du temps.
- ☆ **Point de vue de Lorentz :** Le conducteur est mobile dans un champ magnétique stationnaire (indépendant du temps).

Un problème d'induction peut être résolu en adoptant l'un de ces points de vue, le résultat sera équivalent mais les calculs pour y parvenir peuvent être plus ou moins long. Il faudra de l'expérience pour choisir judicieusement.

Attention : ne pas confondre stationnaire et uniforme, cela revient à confondre une variable temporelle avec une variable spatiale. Le champ magnétique peut dépendre des quatre variables (x,y,z,t). Si le champ est stationnaire il ne dépend pas du temps mais peut très bien dépendre des variables d'espace (exemple : champ magnétique autour d'un aimant). Si le champ magnétique est uniforme il ne dépendra pas des variables d'espace, mais peut très bien dépendre du temps (exemple : champ magnétique au centre de bobines de Helmoltz alimentées par une source alternative de courant).

3.1 Cas de Neumann

Donnons quelques exemples à traiter comme des circuits fixes dans un champ magnétique variable : transformateur, moteur asynchrone, pince ampèremétrique, plaque à induction.
TD 28

3.2 Cas de Lorentz

Donnons quelques exemples à traiter comme des circuits mobiles (et/ou déformables) dans un champs magnétique stationnaire : moteur à courant continu ou synchrone, génératrice (dynamo de vélo), haut-parleur, alternateur, balance de Cotton ou plus généralement la balance de Kibble (utilisé en métrologie pour définir le kilogramme).
TD 29

Conversion électromécanique de puissance

Expérimentalement, dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, il y a deux cas de figure : soit l'opérateur

3. L'hypothèse sous-jacente qui est faite ici c'est $h \gg R$ pour ne pas tenir compte des effets de bords du solénoïde. En effet, rappelons que $B = \mu_0 n I$ est une expression obtenue pour un solénoïde infini, le flux à travers chaque spire d'un solénoïde fini n'est pas identique pour chaque spire et est toujours inférieur (surtout sur les bords du solénoïde) à la valeur $\mu_0 n I \times \pi R^2$. L'hypothèse $h \gg R$ assure d'avoir un flux total réel proche de celui obtenu dans l'exemple.

utilise un générateur de courant pour donner un mouvement au circuit (typiquement un moteur) soit l'opérateur déplace le circuit pour y créer un courant (typiquement une génératrice). Le rendement de cette conversion électromécanique est de 100% : la puissance fournie par l'opérateur est entièrement convertie dans les deux cas ! Ce constat peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + \mathcal{P}_{\text{f.é.m.}} = 0 \tag{3.1}$$

Cette équation de conservation peut être utilisée pour résoudre un exercice lorsque le cadre d'étude est celui du point de vue de Lorentz. Dans le cas du rail de Laplace par exemple, en faisant passer un courant dans le circuit, la tige se met en mouvement à une vitesse v par la force de Laplace $I\ell B$ (courant $\times$ longueur de la tige $\times$ norme du champ magnétique). L'expression de la variation de flux magnétique à travers le circuit (i.e. l'opposé de force électromotrice d'après la loi de Faraday) correspond à Blv (norme du champ magnétique $\times$ surface élémentaire balayée par la tige pendant un instant $\mathrm{d}t$). Il vient :

$$\underbrace{eI}_{\text{Puissance de la f.é.m.}} + \underbrace{I\ell Bv}_{\text{Puissance de Laplace}} = -B\ell vI + I\ell Bv = 0$$

On retrouve l'expression (3.1). Le rail de Laplace est un exemple de conversion électromécanique avec un rendement de 100%.

Attention : Une conversion électromécanique avec un rendement de 100% ne veut pas dire que la machine qui exploite cette conversion a un rendement (= énergie utile / énergie fournie) de 100%. Les pertes par effet Joule, les pertes mécaniques ou les "pertes fer" sont une cause de baisse de rendement pour les moteurs ou les génératrices. Si par contre le but de la machine est de créer du chauffage (chauffage par induction), le rendement est de 100% (rien de surprenant, cf thermodynamique).

Exemple

Pour un moteur a courant continu, la puissance associé au couple moteur Γ ayant pour origine les forces de Laplace vérifie :
$\mathcal{P}_{Laplace} = \Gamma\omega$ où ω est la vitesse angulaire de rotation du moteur. Le couple Γ dépend linéairement de l'intensité i circulant dans le circuit (la force de Laplace dépend linéairement de l'intensité), soit $\Gamma = Ki$ avec K une constante.
La puissance associée à la force électromotrice e vérifie $\mathcal{P}_{\text{f.é.m.}} = ei$.
D'après l'équation (3.1) et les formules précédentes, on obtient une force électromotrice vérifiant :

$$e = -K\omega$$

La f.é.m. dépend donc de la vitesse angulaire de rotation et inversement, pour imposer une vitesse angulaire il faut appliquer une certaine tension. La constante K s'exprime en Weber (ou $\mathrm{T.m^2}$) par analyse dimensionnelle en utilisant la loi de Faraday.

(Hors programme) Éléments de démonstration de l'équation (3.1)

Modélisation : Un conducteur (un fil de cuivre par exemple) peut être vu comme étant un réseau cristallin chargé positivement dans lequel se déplace des porteurs de charge négatifs, les électrons. Cette vision simplifiée permet d'écrire une force de Lorentz pour toute charge positive appartenant au réseau et pour toute charge négative mobile.
Rappels (Clef 0) : La force de Lorentz s'exerçant sur une charge q ayant une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ donné, s'exprime : $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$. La puissance de la force de Lorentz magnétique sur une charge est nulle : $(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$.
Clef 1 : Le fait que le conducteur soit électriquement neutre permet d'affirmer qu'il y a autant de charges positives que négatives, ce qui permet d'enlever la contribution de la force de Lorentz électrique de la force résultante sur le conducteur.
Clef 2 : Les forces de Lorentz magnétiques entre charges positives et négatives ne se compensent pas puisque les électrons sont libres de se déplacer dans le conducteur, alors que les charges positives sont liées au réseau et sont donc fixes par rapport au conducteur. Décomposons le mouvement des électrons : leurs vitesses se décompose en une partie lié au mouvement du conducteur (indice "c") et une autre au mouvement des électrons par rapport au fil (indice "e/c"). On pourrait noter pour un électron : $\vec{v}_e = \vec{v}_c + \vec{v}_{e/c}$. Décomposons le mouvement des charges positives liées au conducteur : il ne reste que la vitesse du conducteur puisque les charges sont liées à celui-ci. Pour une charge positive (indice "cp") : $\vec{v}_{\text{cp}} = \vec{v}_{\text{c}}$.
Remarque : En effectuant la somme des forces sur l'ensemble des porteurs de charge on obtient l'expression de la force de Laplace sur le conducteur : cette force résulte uniquement de la vitesses des électrons par rapport au conducteur (grandeur relié directement au courant). La vitesse du conducteur n'intervient pas dans la force de Laplace mais dans la force électromotrice à travers **le champ électromoteur**.
Définition : Le champ électromoteur $\vec{E}_m$ dans une portion de conducteur de vitesse $\vec{v}_c$ plongé dans un champs magnétique statique $\vec{B}$ est défini par l'expression : $\vec{E}_m = \vec{v}_c \wedge \vec{B}$.
Propriété : Le champ électromoteur met les électrons en mouvement dans le conducteur, donc crée un courant I (pour un circuit filiforme), contrairement à la force de Laplace qui met en mouvement le conducteur. La force électromotrice provient du champ électromoteur intégré sur tout le circuit.
Pour finir : Pour arriver à l'expression finale il faut déterminer la puissance résultante des forces de Lorentz magnétique sur les électrons. On simplifiera l'étude en utilisant un conducteur filiforme rectiligne se déplaçant perpendiculairement a sa direction pour que les électrons aient en moyenne une vitesse colinéaire au conducteur (comme dans le modèle du rail de Laplace). Pour un électron "moyen"[a] :

$$\begin{aligned}
P &= \left(-e\vec{v}_e \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v}_e \quad \text{(On sait déjà que la puissance de la force de Lorentz magnétique est nulle)} \\
0 &= \left[-e\left(\vec{v}_c + \vec{v}_{e/c}\right) \wedge \vec{B}\right] \cdot \left(\vec{v}_c + \vec{v}_{e/c}\right) \quad \text{(composition des vitesses)} \\
0 &= -e\left(\vec{v}_c \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v}_{e/c} - e\left(\vec{v}_{e/c} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v}_c \\
0 &= -e\vec{E}_m \cdot \vec{v}_{e/c} - e\left(\vec{v}_{e/c} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v}_c
\end{aligned}$$

En appliquant l'étude à l'ensemble des porteurs de charge, on remarque que le premier terme de droite contribue au produit de la force électromotrice et du courant (puissance de la force électromotrice), alors que le second terme contribue à la puissance de la force de Laplace, soit le résultat sous forme schématique :

$$0 = -e\vec{E}_m \cdot \vec{v}_{e/c} - e\left(\vec{v}_{e/c} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v}_c \qquad \text{Appliqué au circuit} \;\Rightarrow \qquad 0 = \mathcal{P}_{\text{f.é.m}} + \mathcal{P}_{\text{Laplace}}$$

a. Le calcul sur l'ensemble des électrons fait intervenir uniquement une vitesse moyenne. On peut se restreindre à étudier un électron hypothétique ayant cette vitesse moyenne : pour connaître le comportement de l'ensemble des électrons il suffit de multiplier les équations trouvées par le nombre d'électrons étudiés (même astuce qu'en thermodynamique statistique).