

## 1 Introduction

Nous avons vu qu'en régime sinusoïdal forcé, un OHA a une réponse qui dépend du terme de forçage, le plus marquant étant l'effet de la fréquence d'excitation du système avec des effets possibles de résonance. Dans ce chapitre nous allons étendre cette analyse à n'importe quel système linéaire invariant temporellement. Pour caractériser ce type de système, il suffit d'envoyer un signal d'entrée et regarder ce qu'il en sort. Ce qui lie la sortie à l'entrée est appelé dans ce cas un filtre linéaire.

### Définition 1 - Filtre linéaire

Fonction qui relie une grandeur d'entrée à une grandeur de sortie d'un système. Cette fonction est linéaire si ses grandeurs sont reliées par une équation différentielle.

Un filtre peut être représenté schématiquement comme sur la figure de droite : un lien entre une entrée et une sortie qui varie dans le temps. Cette notion peut s'appliquer à des domaines variés comme la mécanique, l'électro-cinétique, l'optique.



L'intérêt du filtre est soit d'exprimer de façon simple la réponse d'un système pour étudier son comportement (comme le fait la tomographie), soit d'utiliser ses propriétés pour filtrer un signal (réduire les vibrations sur un VTT, réduire les hautes fréquences spatiales pour compresser une image en jpeg, sélectionner la bande de fréquence utile pour écouter la station radio souhaitée).

## 2 Fonction de transfert harmonique

### 2.1 Du filtre linéaire à sa fonction de transfert

Nous avons vu dans le chapitre 3 que n'importe quel signal périodique<sup>1</sup> de période  $T$  pouvait s'exprimer comme une somme de signaux sinusoïdaux de période  $T/n$  où  $n \in \mathbf{N}^*$ . Comme les filtres étudiés dans ce chapitre sont linéaires, pour étudier un signal périodique  $e(t)$  quelconque, on peut traiter la réponse du filtre à chaque composante de la décomposition du signal à une pulsation donnée de manière indépendante. L'addition de ces réponses donne la réponse du filtre  $s(t)$  à l'entrée  $e(t)$ . Pour étudier le filtrage d'un signal d'entrée périodique quelconque nous avons uniquement besoin de connaître la réponse du filtre à un signal sinusoïdal de fréquence quelconque. Nous allons pour cela utiliser le même outil mathématique pour étudier un système dans un régime sinusoïdal forcé : on associe les variables d'entrée et de sortie à des grandeurs complexes. De cette manière, l'équation différentielle qui relie  $e(t)$  à  $s(t)$ , est transformée en une équation algébrique complexe entre  $\underline{e}(\omega)$  et  $\underline{s}(\omega)$ . On définit alors la fonction de transfert harmonique :

### Définition 2 - Fonction de transfert harmonique

Fonction représentant la réponse en fréquence d'un filtre. Elle est égale au rapport entre la réponse fréquentielle  $\underline{s}(\omega)$  d'un filtre linéaire soumis à une excitation  $\underline{e}(\omega)$  :

$$H(\omega) = \frac{\underline{s}(\omega)}{\underline{e}(\omega)}$$

Le module de cette fonction représente le rapport des amplitudes des deux signaux, et son argument représente leurs différences de phase.

Ce qui a été expliqué précédemment est schématisé sur la figure 9.1 pour plus de clarté. On comprend notamment l'importance de connaître la fonction de transfert pour toutes valeurs de pulsations, c'est ce qui permet de trouver rapidement comment n'importe quel signal d'entrée va être transformé par le filtre linéaire, d'où la nécessité de représenter cette fonction : c'est le diagramme de Bode.

1. Voir note du chapitre 3 pour les hypothèses d'application du développement en série de Fourier.

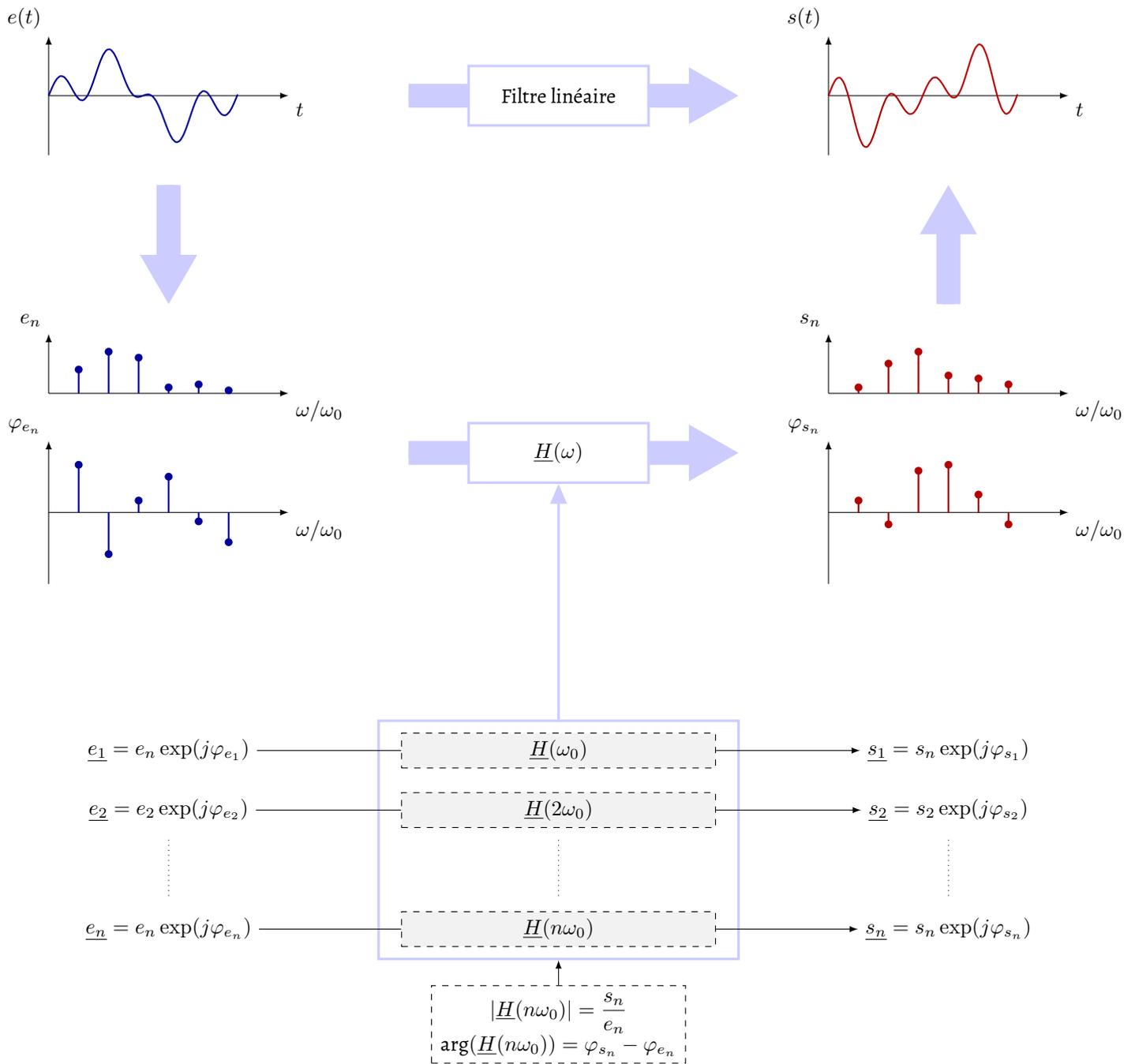


FIG. 16.1 – Schéma de principe de l'équivalence entre un filtre linéaire et une fonction de transfert. A partir d'un signal quelconque de durée finie  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , ce signal peut être transformé par décomposition en série de Fourier en somme de signaux sinusoïdaux de période  $T_0/n = 2\pi/n\omega_0$  où  $n \in \mathbf{N}^*$ , d'amplitude  $e_n$  et de phase  $\varphi_{e_n}$ . Il suffit d'utiliser la fonction de transfert complexe  $\underline{H}(\omega)$ , pour chaque pulsation  $n\omega_0$  présente dans le signal d'entrée, pour déterminer l'amplitude  $s_n$  et la phase de sortie  $\varphi_{s_n}$  à la pulsation  $n\omega_0$ . On reconstitue le signal de sortie réel en faisant une décomposition en série de Fourier inverse.

## 2.2 Diagrammes de Bode

### Définition 3 - Diagrammes de Bode

Diagrammes représentant en coordonnées logarithmiques pour l'axe des abscisses la fonction de transfert d'un système linéaire, en fonction de la fréquence d'excitation d'un signal d'entrée. La fonction de transfert est complètement spécifiée lorsque le diagramme d'amplitude et de phase sont représentés.

Pour tracer l'amplitude, on trace généralement<sup>2</sup> une quantité qui la représente, à savoir le gain en décibels de la fonction de transfert.

### Définition 4 - Gain en décibels

Un rapport de deux puissances  $P_1$  et  $P_2$  peut être mis sous la forme d'un gain en décibels  $G_{dB}$  vérifiant :

$$G_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_2}{P_1} \right),$$

où  $\log_{10}$  est la fonction logarithme népérien en base 10. Le gain en décibels d'une fonction de transfert s'exprime :

$$G_{dB} = 20 \log_{10} (|\underline{H}(\omega)|)$$

**Remarque :** On notera la différence entre les pré-facteurs devant le logarithme. Ceci est dû au fait que la fonction de transfert relie les amplitudes, et que le carré des amplitudes est plus à même de représenter une puissance<sup>3</sup> (on se rappelle des formules du type  $Ri^2$  ou  $u^2/R$  pour la puissance dissipée par effet Joule).

## 2.3 Principaux types de filtres

Il existe quatre principaux types de filtres, schématisés sur la figure 9.2. Le passe-bas laisse passer les basses fréquences et "coupe" les hautes fréquences, i.e. l'amplitude de la fonction de transfert tend vers 0 à hautes fréquences, inversement pour le passe-haut. Le filtre passe bande laisse passer une zone en fréquence et coupe le reste, inversement pour le coupe bande.

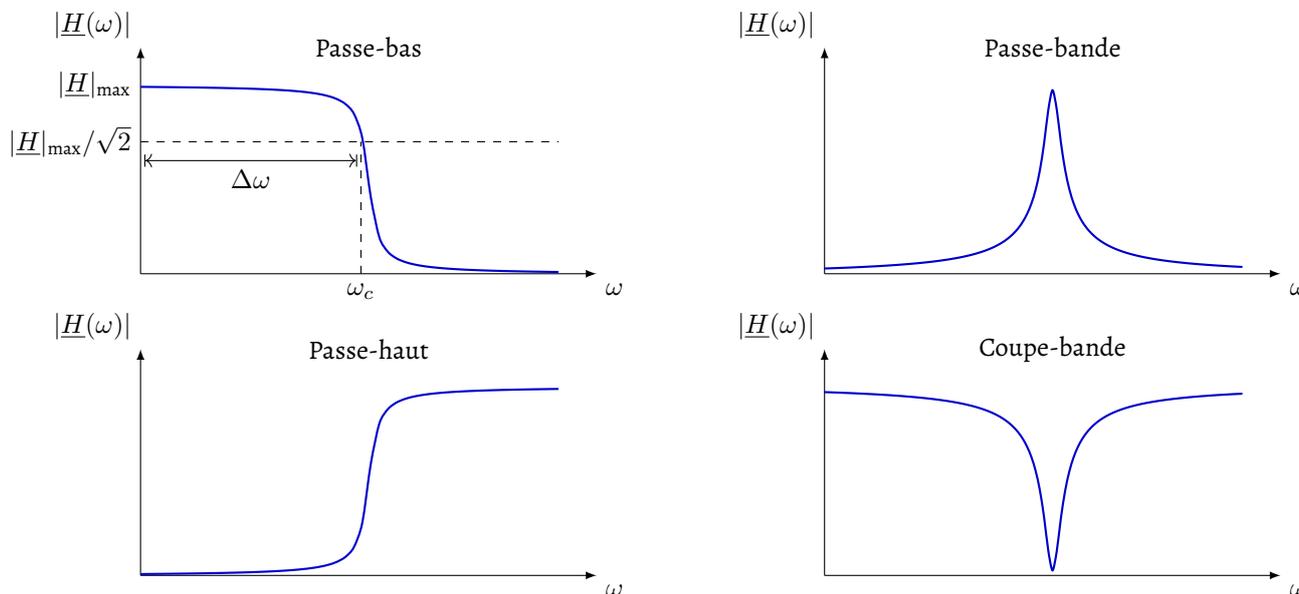


FIG. 16.2 – Représentation du diagramme en amplitude de 4 filtres classiques. On repère dans le filtre passe bas la bande passante de largeur  $\Delta\omega$  et la pulsation de coupure  $\omega_c$

Pour décrire plus en détail ces filtres on introduit de nouveaux termes comme la fréquence de coupure ou la bande passante, que l'on a placé à titre d'exemple sur la figure 9.2 :

2. Rien n'interdit de représenter l'amplitude de la fonction de transfert directement. Simplement, pour le filtrage, on veut parfois atténuer une fréquence d'entrée et en amplifier une autre, ce qui conduit à une représentation illisible dans sa totalité.

3. Cette notion d'énergie et de puissance d'un signal tient son origine en traitement du signal.

### Définition 5 - Bande passante

Intervalle de pulsation  $[\omega_1, \omega_2]$  dans lequel

$$|\underline{H}(j\omega)| \geq \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{si } \omega \in [\omega_1, \omega_2].$$

### Définition 6 - Pulsation de coupure

Pulsation(s) pour la(es)quelle(s)

$$|\underline{H}(\omega_c)| = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

De manière équivalente<sup>a</sup>, sur un diagramme de Bode en amplitude, la pulsation de coupure doit vérifier :

$$G_{dB}(\omega_c) = G_{dB_{\max}} - 3dB.$$

a. Le "-3dB" vient d'une approximation de  $\sqrt{2}$  en décibels :  $20 \log_{10}(|\underline{H}(\omega_c)|) = 20 \log_{10}(|\underline{H}|_{\max}) - 20 \log_{10}(\sqrt{2}) \simeq G_{dB_{\max}} - 3$ .

Pour les systèmes présentant une résonance, on parle d'acuité de résonance, qui quantifie sa finesse. Pour les systèmes d'ordre 2, cette acuité est proche du facteur de qualité

### Définition 7 - Acuité de la résonance

Lorsque un système linéaire comporte une résonance de pulsation  $\omega_r$  et une bande passante de largeur  $\Delta\omega$  autour de cette résonance, alors l'acuité de la résonance est définie par la valeur :

$$\frac{\omega_r}{\Delta\omega}.$$

## 3 Application aux circuits électriques

### 3.1 Approche qualitative

Avant toute étude quantitative, nous pouvons déterminer le comportement aux limites des circuits électriques rien qu'en remplaçant les composants du circuits par leurs équivalents haute et basse fréquence. On utilisera pour cela le tableau sur les impédances de dipôles classiques du chapitre précédent.

#### Exemple

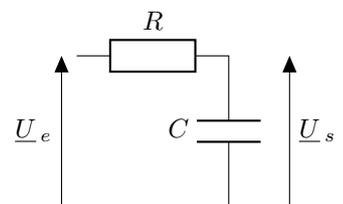


Pour le circuit ci contre, le circuit est un filtre linéaire qui prend comme entrée la tension aux bornes du circuit RC série, et qui donne en sortie la tension aux bornes du condensateur. On peut analyser qualitativement le comportement du filtre : à basse fréquence, le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert, à haute fréquences il est équivalent à un fil.

Si on remplace le condensateur par un interrupteur ouvert, il n'y a plus de courant traversant la résistance, donc pas de chute de potentiel à ses bornes : la tension  $\underline{U}_s = \underline{U}_e$  et l'amplitude de la fonction de transfert associée vaut donc 1 à basse fréquence.

Si on remplace le condensateur par un fil, il n'y a plus de différence de potentiel aux bornes du condensateur : la tension  $\underline{U}_s = 0$  et l'amplitude de la fonction de transfert associée vaut donc 0 à haute fréquence.

**Conclusion :** le circuit électrique a le comportement d'un filtre de type passe-bas.



#### Exercice 16.1

Étudier le comportement à haute et basse fréquence d'un filtre RL série puis RLC série. Quel type de filtre obtient-on si l'on choisit comme tension de sortie celle aux bornes de la résistance, de la bobine ou du condensateur pour le RC, RL et RLC série?

### 3.2 Etude d'un circuit passe-bas du premier ordre

Reprenons le circuit RC série étudié dans l'exemple précédent. Voici la méthode pour étudier quantitativement un filtre.

**Etape 1 :** Déterminer la fonction de transfert

Nous pouvons appliquer la loi du pont diviseur de tension pour déterminer la fonction de transfert du filtre. On obtient :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad (3.1)$$

**Etape 2a :** si possible, identifier la fonction à une forme canonique

On peut mettre cette fonction sous la forme canonique du passe-bas d'ordre 1 :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad (3.2)$$

avec  $\omega_c = 1/RC$  la pulsation de coupure<sup>4</sup> du système et  $H_0 = 1$  le gain statique (gain pour  $\omega = 0$ ).

**Etape 2b :** déterminer les expressions analytique du gain et de la phase en fonction de la pulsation d'excitation.

Pour représenter la fonction de transfert du passe bas d'ordre 1, on utilise les diagrammes de Bode. On représente pour cela le gain et l'amplitude que l'on peut exprimer puisque nous avons accès à la fonction de transfert :

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \right), \quad \arg(\underline{H}) = -\arctan \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right),$$

$$= 20 \log_{10}(|H_0|) - 10 \log_{10}(1 + x^2), \quad = -\arctan(x),$$

avec  $x = \omega/\omega_c$  pour être ramené à étudier une fonction d'une seule variable.

**Etape 3 :** étudier le comportement asymptotique du filtre et tracer le tout sur les diagrammes de Bode.

Pour  $\omega \rightarrow 0$ ,

$$G_{dB} \simeq 20 \log_{10}(|H_0|) \quad \arg(\underline{H}) \simeq 0$$

Pour  $\omega \rightarrow +\infty$ ,

$$G_{dB} \simeq 20 \log_{10}(|H_0|) - 20 \log_{10}(x) \quad \arg(\underline{H}) \simeq -\frac{\pi}{2}$$

On constate que les tangentes aux courbes en 0 et  $+\infty$  sont principalement des droites de pente nulle (parallèle à l'axe des abscisses), sauf pour la tangente à la courbe de gain en  $+\infty$ , où la droite a une pente de -20 dB par décade (par puissance de 10). C'est une pente caractéristique d'un filtre passe-bas du premier ordre. Les diagrammes de Bode sont tracé sur la figure 9.3.

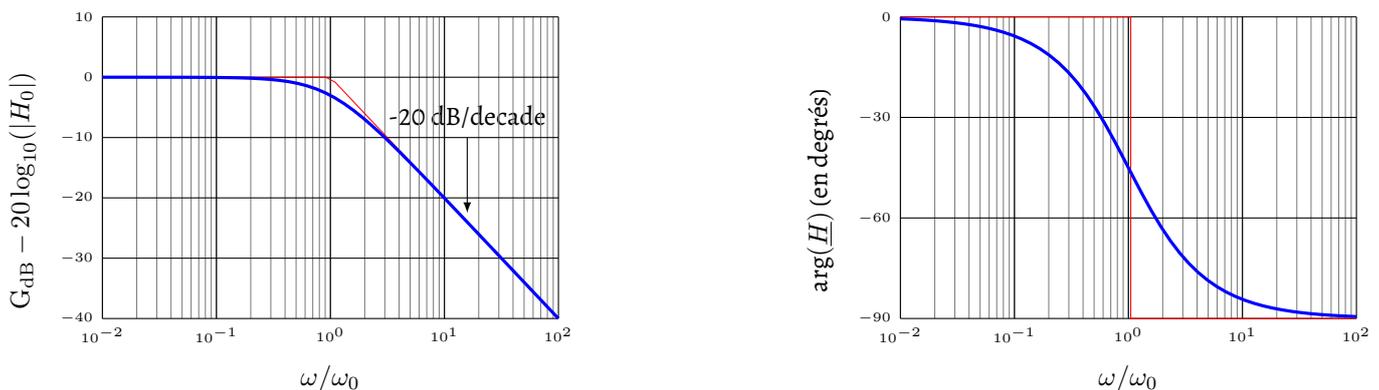


FIG. 16.3 – Diagrammes de Bode d'une fonction de transfert du premier ordre.

**Remarques :**

1. Le signal de sortie est toujours retardé par rapport au signal d'entrée (différence de phase négative). Point particulier : à la fréquence de coupure, le signal de sortie est retardé de  $-\pi/4$  pour  $\omega = \omega_c$  ( $-\arctan(1) = -\pi/4$ ).
2. Pour le diagramme de gain, le signal est toujours en dessous des asymptotes. Il n'y a pas de résonance pour les systèmes d'ordre 1.

4. On peut vérifier que c'est bien la définition de la pulsation de coupure : on doit avoir  $|\underline{H}(\omega)| = |\underline{H}|_{\max}/\sqrt{2}$  pour  $\omega = \omega_c$ , c'est bien le cas ( $|1/(1+j)| = 1/\sqrt{2}$ ).

- La largeur de la bande passante  $\Delta\omega$  est directement égal à la fréquence de coupure  $\omega_c$ .
- Dans la zone  $\omega \gg \omega_c$ , le filtre se comporte comme un intégrateur (à une constante multiplicative près), car

$$\underline{U}_s = \omega_c \frac{\underline{U}_e}{j\omega} \Leftrightarrow U_s(t) = \frac{1}{RC} \int U_e(t) dt$$

On parle de pseudo-intégrateur. Dans la zone  $\omega \ll \omega_c$ , le filtre se comporte comme un proportionnel : le signal d'entrée et proportionnel au signal de sortie (dans le cas du circuit RC série  $H_0 = 1$ , donc le signal de sortie est égal au signal d'entrée).

### Exercice 16.2

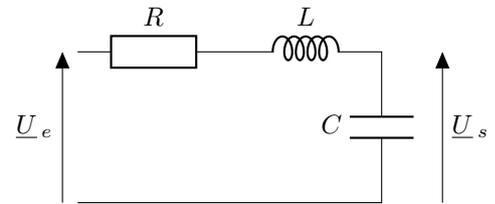
Faire la même étude en prenant comme signal de sortie la tension aux bornes de la résistance. On identifiera la fonction de transfert obtenue à la forme canonique d'un filtre passe haut d'ordre 1 :

$$\underline{H}(\omega) = H_\infty \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad (3.3)$$

Montrer que l'on obtient dans le cas  $\omega \ll \omega_c$  un comportement pseudo-dérivateur

## 3.3 Etude d'un circuit passe-bas du deuxième ordre

Prenons le circuit linéaire d'ordre 2 ci-contre. On peut lui appliquer les mêmes étapes que précédemment pour le décrire :



- Pont diviseur de tension :  $\underline{H}(\omega) = 1/(1 + jRC\omega - LC\omega^2)$ .
- Identification à la fonction de transfert canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 2 :  $H_0/(1 + jx/Q - x^2)$  avec  $H_0 = 1$  amplitude statique à  $x = 0$ ,  $x = \omega/\omega_0$  avec  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  et  $Q = \sqrt{L}/R\sqrt{C}$ .
- Gain :  $G_{dB} = -10 \log_{10}((1 - x^2)^2 + x^2/Q^2)$ ,  
Phase :  $\arg(\underline{H}(\omega)) = -\pi/2 + \arctan\left(\frac{1-x^2}{x/Q}\right)$ .
- Pour  $\omega \rightarrow 0$ ,

$$G_{dB} \simeq 20 \log_{10}(|H_0|)$$

$$\arg(\underline{H}) \simeq 0$$

Pour  $\omega \rightarrow +\infty$ ,

$$G_{dB} \simeq 20 \log_{10}(|H_0|) - 40 \log_{10}(x)$$

$$\arg(\underline{H}) \simeq -\pi$$

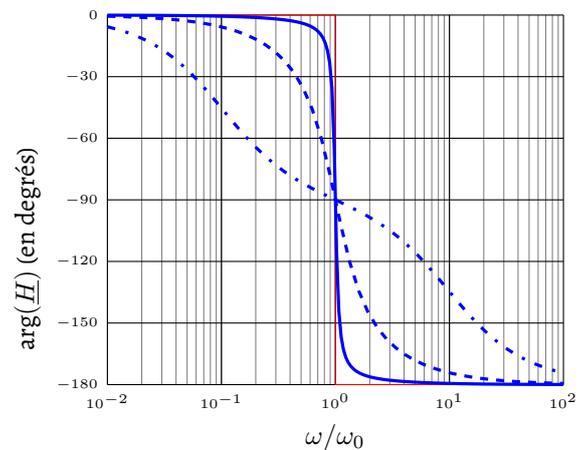
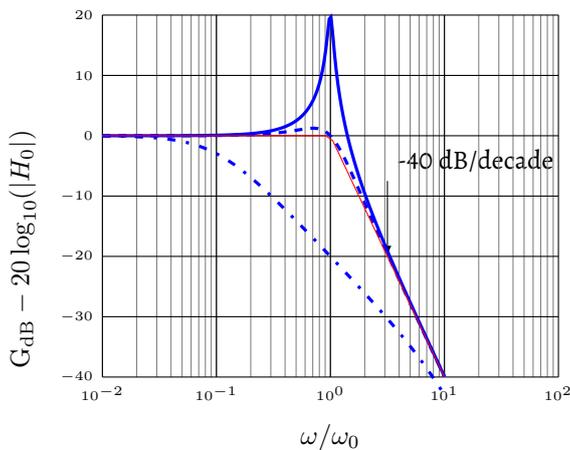


FIG. 16.4 – Diagrammes de Bode d'une fonction de transfert du deuxième ordre. Représentation avec différents facteurs de qualité : courbe pleine  $Q = 10$ , courbe pointillé  $Q = 1$  et courbe tirets et pointillés  $Q = 1/10$ .

## 4 Gabarit

Le **gabarit** d'un filtre est l'ensemble des conditions que celui-ci doit respecter. Par exemple, pour le système Virgo, on souhaite créer un filtre mécanique pour réduire l'ensemble des vibrations autre que celles dues à la déformation de l'espace-temps (micro tremblement de terre, vagues, etc.) aux basses fréquences (en dessous de 10 Hz pour la détection de fusion d'étoiles binaires). Il y a un cahier des charges à respecter : si on veut pouvoir observer ces phénomènes, il faut que l'atténuation soit inférieure à  $10^{-9}$  sur la plage de fréquence désirée.

On va étudier un autre cas concret : un musicien souhaite créer un filtre audio pour n'entendre que les sons graves dans un morceau de musique (inférieur au  $do_3$  à 264 Hz). Son idée est de créer un filtre passe bas qui atténue le  $do$  suivant ( $do_4$ ) de 60 dB (seuil minimal audible) et qui laisse quasiment inchangé (atténuation maximale de 3 dB) les notes avant le  $do_3$  pour conserver le plus possible la hauteur de chaque note. Pour les mêmes raisons, aucune notes ne doit être amplifiée (amplification nulle).

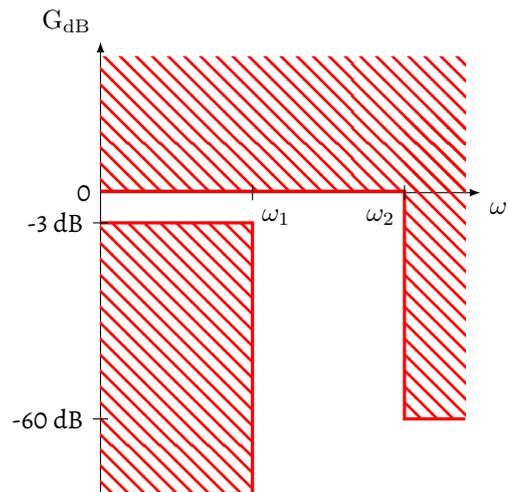
### 4.1 Monter un cahier des charges

On peut exprimer les attentes du musicien en terme de conditions que doit vérifier le filtre qu'il utilise. Le filtre est linéaire par hypothèse, sa fonction de transfert complexe notée  $\underline{H}(\omega)$  le détermine entièrement. Des conditions sur le filtre s'écrivent simplement par des conditions sur la fonction de transfert :

1. Zone interdite pour toute fréquences :  $|\underline{H}(\omega)| \leq 0\text{dB}$  pour tout  $\omega$ . C'est la condition sur l'amplification maximale de chaque note.
2. Zone interdite en basse fréquence :  $-3\text{dB} \leq |\underline{H}(\omega)|$  pour  $\omega \leq \omega_1$  avec  $\omega_1 = 2\pi \times 264\text{rad.s}^{-1}$  correspondant à la bande passante minimale du filtre.
3. Zone interdite en haute fréquence :  $|\underline{H}(\omega)| \leq -60\text{dB}$  pour  $\omega \geq \omega_2$  avec  $\omega_2 = 2\pi \times 2 \times 264\text{rad.s}^{-1} = 2\omega_1$  la pulsation de la zone d'atténuation.

### 4.2 Tracé du gabarit

Le tracé du gabarit reprend le cahier des charges et utilise ses notations (figure ci-contre pas à l'échelle). Les zones hachurées représentent les zones interdites à la fonction de transfert selon le cahier des charges.



### 4.3 Choix du filtre

On se rend compte que le gabarit va conditionner le choix du filtre. Notamment, pour passer du point -3 dB à  $\omega_1$ , au point -60 dB à  $\omega_2 = 2\omega_1$ , il faut une pente minimale de  $-60/\log_{10}(2) \simeq -200$  dB par décades. Ce n'est pas un filtre du premier ni du deuxième ordre qui peut satisfaire le cahier des charges<sup>5</sup>.

#### Exercice 16.3

Le filtre proposé par le constructeur étant trop cher, le musicien revoit ces attentes à la baisse : il propose à ce dernier d'utiliser un filtre du premier ordre (pour le faible coût) s'il peut choisir lui-même la fréquence d'atténuation. Déterminer quelle est la fréquence d'atténuation minimal  $\omega_2$  que le constructeur peut atteindre avec ces nouvelles contraintes. Le musicien est-il satisfait?

5. Si on suit la logique d'une pente de  $-N \times 20\text{dB/décades}$  avec un filtre d'ordre  $N$ , on devrait avoir un filtre au minimum d'ordre 10!