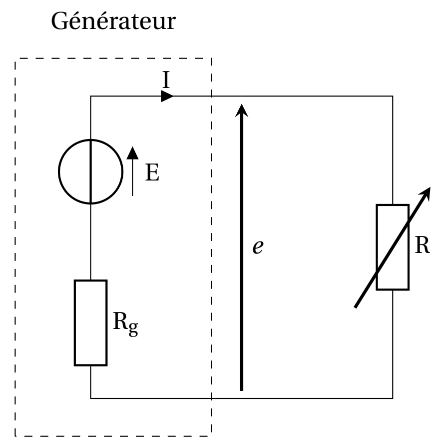
DM - Électronique

Puissance maximale délivrée par un générateur

1 Régime continu permanent



Chercher la valeur de l'impédance d'entrée d'un composant qui maximise la puissance délivrée par un générateur est liée à la technique dite "d'adaptation d'impédance". Un exemple simple est de déterminer la puissance maximale que peut délivrer un générateur réel de tension à une résistance.
Le schéma ci-contre représente un générateur de tension réel, modélisable comme un générateur de tension idéal E en série avec une résistance R_g, branché à une résistance variable R.

1. Le produit «eI» caractérise deux puissances distinctes, quelles sont elles ?

> Le produit eI représente à la fois la puissance **fournie** par le générateur et la puissance **reçue** par la résistance. [1]

2. Exprimer la puissance reçue par la résistance variable en fonction de R et I. Justifiez votre réponse en utilisant les lois des circuits.

> La tension aux bornes de la résistance vaut e et le courant traversant la résistance vaut I en convention récepteur. La puissance reçue P_r vaut $P_r = eI = RI^2$ d'après la loi d'Ohm. [1]

3. Exprimer la puissance fournie par le générateur P_g en fonction de E, R_g et I. Justifiez votre réponse en utilisant les lois des circuits.

> Soit u la tension aux bornes de la résistance interne du générateur en convention générateur et I le courant traversant la résistance. La loi d'Ohm s'écrit en convention générateur $u = -R_g I$. La loi d'additivité des tensions permet d'écrire $e = u + E$. La puissance fournie par le générateur P_g vaut donc $P_g = eI = EI - R_g I^2$. [1]

4. En déduire que l'expression de la puissance fournie par le générateur vérifie :

$$P_g = \frac{x}{(1+x)^2}\frac{E^2}{R_g},$$

où $x = \frac{R}{R_g}$.

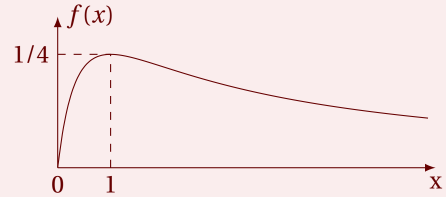
> Expression du courant I en fonction de E, R et R_g : les deux puissances étant par définition égales, $EI - R_g I^2 = RI^2$, soit $\boxed{I = \frac{E}{R+R_g} = \frac{1}{1+x}\frac{E}{R_g}}$ [1]
> On aurait pu obtenir ce résultat en calculant le courant à partir de la résistance équivalente de la maille et de la tension E à ses bornes.
> Or $P_g = P_r = RI^2$. En utilisant l'expression de I nous obtenons la formule souhaitée. [1]

5. Faire une étude de la fonction $f : x \longrightarrow \frac{x}{(1+x)^2}$ en proposant un domaine de définition physiquement acceptable au regard de la question précédente. Bonus : tracer l'allure de cette fonction en repérant des points caractéristiques.

Les valeurs des résistances R et R_g sont strictement supérieures à 0 (une résistance négative ou nulle nécessite des composants spécifiques non mentionnés dans l'énoncé comme des composants actifs). Le domaine physiquement acceptable est de la fonction f serait $\mathbb{R}_*^+$. [1]
Une rapide étude asymptotique donne le profil de f en x pour $x \ll 1$ et en $1/x$ pour $x \gg 1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ car composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$: $1/(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$, $g : x \to x^2$ et $h : x \to x$ dérivables sur $\mathbb{R}$. [+1]

Le calcul de la dérivée de f donne : $\boxed{f'(x) = \dfrac{(1-x)}{(1+x)^3}}$, le tableau de variation et la fonction sont représentés ci-contre. [2]

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0



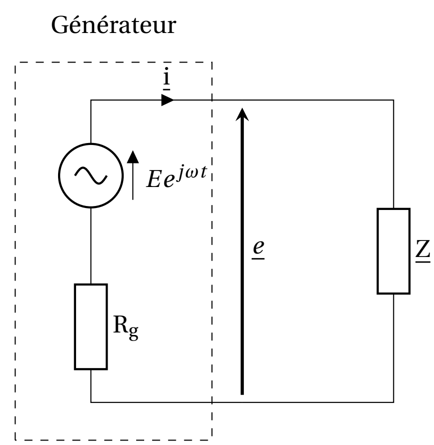
6. En déduire l'expression de la puissance maximale délivrée par le générateur en fonction de E et R_g.

Comme $P_g = \alpha \times f(x)$, avec α une constante positive, la puissance maximale est atteinte pour le maximum de f soit lorsque $R = R_g$ ($x = 1$). Dans ce cas, $f(x) = 1/4$, et on en conclue que la puissance maximale que peut fournir le générateur à la résistance vérifie : $\boxed{P_g = \dfrac{E^2}{4R_g}}$ [1]

7. Proposer une valeur de résistance R_g et de tension E d'un générateur de laboratoire, puis calculer la puissance maximale délivrée par ce générateur et l'intensité associée.

Pour une résistance $R_g = 50\ \Omega$ et E = 10V, $P_g = 0,5$W. Les GBF en TP ne sont pas fait pour délivrer de fortes puissances. [1]

2 Régime sinusoïdal forcé



Étudions le cas d'un dipôle alimenté en régime sinusoïdal forcé. Remplaçons le générateur de tension continu par un générateur de tension alternatif et la résistance variable par un dipôle d'impédance $\underline{Z} = \mathrm{R} + j\mathrm{X}$ où R est la partie réelle (appelée résistance) et X la partie imaginaire (appelée réactance) du dipôle. La propriété suivante est considérée comme admise en régime sinusoïdal forcé :
Soit P_g la puissance moyenne délivrée par le générateur en régime sinusoïdal forcé. Cette puissance vérifie :

$$\mathrm{P_g} = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}(\underline{i} \times \underline{e}^*),$$

où $\underline{e}^*$ représente le complexe conjugué de $\underline{e}^*$ ($\underline{e} \times \underline{e}^* = |\underline{e}|^2$) et $\mathfrak{Re}$ la notation de l'application «partie réelle».

8. Rappeler l'expression de l'impédance d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur.

$R, jL\omega, 1/jC\omega$.

9. Montrer que la puissance moyenne délivrée par le générateur vérifie :

$$\mathrm{P_g} = \frac{\mathfrak{Re}(\underline{\mathrm{x}})}{|1+\underline{\mathrm{x}}|^2} \times \frac{\mathrm{E}^2}{2\mathrm{R_g}}, \qquad \text{où } \underline{\mathrm{x}} = \frac{\underline{\mathrm{Z}}}{\mathrm{R_g}}.$$

Définition de l'impédance : $\underline{e} = \underline{Z}\underline{i}$
Le calcul de l'impédance équivalente de $\underline{Z}$ et R_g en série permet d'obtenir $\underline{i}$ en fonction de $Ee^{j\omega t}$: $Ee^{j\omega t} = (R_g + \underline{Z})\underline{i}$. En combinant les expressions nous obtenons $\underline{e}$ et $\underline{i}$ indépendamment :

$$\boxed{\underline{e} = \frac{\underline{Z}}{R_g + \underline{Z}} Ee^{j\omega t}} \qquad \boxed{\underline{i} = \frac{1}{R_g + \underline{Z}} Ee^{j\omega t}} \tag{1}$$

Exprimons le produit $\underline{i} \times \underline{e}^* = \frac{1}{R_g + \underline{Z}} E e^{j\omega t} \frac{\underline{Z}^*}{(R_g + \underline{Z})^*} E e^{-j\omega t}$. Les termes dépendants du temps se simplifient. Le dénominateur vaut $|R_g + \underline{Z}|^2$ (produit d'un complexe et de son conjugué). La partie réelle de $\underline{Z}$ étant identique à celle de son complexe conjugué,

$$\frac{1}{2}\mathfrak{Re}(\underline{i} \times \underline{e}^*) = \frac{\mathfrak{Re}(\underline{Z})}{|R_g + \underline{Z}|^2} \frac{E^2}{2}.$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par $\mathrm{R_g^2}$ nous obtenons le résultat attendu.

2.1 Cas particulier : résistance non nulle et réactance nulle

On suppose la réactance du dipôle nulle, soit $\underline{Z} = \mathrm{R}$.

10. Exprimer $\underline{i}$ et $\underline{e}$ en fonction de E, R, $\mathrm{R_g}$ et $e^{j\omega t}$.

D'après (1),

$$\boxed{\underline{e} = \frac{R}{R_g + R} E e^{j\omega t}} \qquad \boxed{\underline{i} = \frac{1}{R_g + R} E e^{j\omega t}}$$

11. Exprimer les signaux réels i(t) et e(t) et en déduire qu'ils sont en phase. Déterminer le produit i(t) × e(t) puis exprimer sa moyenne sur une période temporelle $T = 2\pi/\omega$.

En prenant la partie réelle des expressions précédentes, nous obtenons l'expression réelle des signaux :

$$\boxed{e(t) = \frac{R}{R_g + R} E \cos(\omega t)}, \qquad \boxed{i(t) = \frac{E}{R_g + R} \cos(\omega t)}.$$

Les signaux $e(t)$ et $i(t)$ sont en phase et le produit $e(t)i(t) = \frac{RE^2}{(R+R_g)^2}\cos^2(\omega t)$.

En moyennant l'expression sur une période T :

$$\begin{aligned}
\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} e(t)i(t)\mathrm{d}t &= \frac{RE^2}{(R+R_g)^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2(\omega t)\omega\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{RE^2}}{(\mathrm{R+R_g})^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2u)}{2}\mathrm{d}u \qquad \text{avec } u = \omega t \\
&= \frac{\mathrm{RE^2}}{2(\mathrm{R+R_g})^2} \\
&= \frac{\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R_g}}}{(1+\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R_g}})^2}\frac{\mathrm{E^2}}{2\mathrm{R_g}}
\end{aligned}$$

12. Exprimer $\mathrm{P_g}$ en fonction de $\mathrm{x = R/R_g}$, $\mathrm{R_g}$ et E à partir de l'expression de la question 9. Comparer le résultat à la question précédente.

La puissance calculée à partir de la question 9 donne un résultat identique : $\mathrm{P_g} = \frac{\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R_g}}}{(1+\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R_g}})^2}\frac{\mathrm{E^2}}{2\mathrm{R_g}}$

13. Interpréter le facteur 1/2 de différence avec la partie précédente (question 4).

La tension et le courant ne sont pas constants, la moyenne du produit ei n'est plus la simple multiplication des amplitudes des signaux. Pour des signaux sinusoïdaux $e(t)$ et $i(t)$ en phase, la puissance est le produit de leurs valeurs efficace (amplitude/$\sqrt{2}$). Le $\sqrt{2}$ contribue à la présence du facteur 1/2 (= $1/\sqrt{2}^2$).

2.2 Cas particulier : résistance nulle et réactance non nulle

On suppose la résistance du dipôle nulle, soit $\underline{Z} = j\mathrm{X}$.

14. Exprimer la puissance moyenne délivrée par le générateur à partir de la réponse de la question 9. Commenter.

> L'impédance étant un imaginaire pur, sa partie réelle est nulle. La puissance fournie par le générateur est donc nulle d'après l'expression de la question 9.

15. En remarquant que le rapport $\underline{e}/\underline{i}$ est un imaginaire pur, en déduire que les signaux réels i(t) et e(t) sont en quadrature de phase. Commenter.

> En régime sinusoïdal forcé, $\underline{e} = e_0 e^{j\omega t+\phi_e}$ et $\underline{i} = i_0 e^{j\omega t+\phi_i}$, avec e_0, i_0, ϕ_e et ϕ_i des grandeurs indépendant de t. L'argument du rapport $\underline{e}/\underline{i}$ correspond au déphasage $\Delta\phi$ entre $e(t)$ et $i(t)$ soit $\Delta\phi = \phi_e - \phi_i$.
> Par définition $\underline{e}/\underline{i} = jX$, donc l'argument du rapport vaut $\pi/2$ si X>0 et $-\pi/2$ si X<0, c'est-à-dire que $e(t)$ et $i(t)$ sont en quadrature (e en avance sur i si X>0).
> Les signaux étant en quadrature, calculer la puissance fournie par le générateur revient à calculer la moyenne d'un produit $\cos(x)\sin(x)$ entre 0 et 2π : cette moyenne est nulle, tout comme la puissance du générateur qu'il fourni sur une période.

2.3 Cas général : résistance et réactance non nulles

Exemple du RL série.

16. Quel serait l'impédance d'un résistor de résistance R mis en série avec une bobine d'inductance L? Exprimer le résultat sous la forme $\underline{Z}_1 = \mathrm{R}_1 + j\mathrm{X}_1$ et écrire R_1 et X_1 en fonction des paramètres du problème.

> $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}$ et $X_1 = L\omega$.

17. Montrer qu'en haute fréquence, la puissance délivrée par le générateur s'annule. Comment interpréter ce résultat à partir du comportement en haute fréquence du dipôle?

> D'après la question 9. et l'expression de l'impédance équivalente $\underline{Z}_1$,
>
> $$\mathrm{P_g} = \frac{\mathrm{R}}{(1+\mathrm{R}/\mathrm{R_g})^2 + (\mathrm{L}\omega/\mathrm{R_g})^2}\frac{\mathrm{E}^2}{2\mathrm{R_g}}.$$
>
> Pour $\omega \to \infty$ ($\omega \gg R_g/L$ et $\omega \gg R/L$), $P_g \to 0$.
> À haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert : le courant s'annule ainsi que la puissance.

Pour que le générateur délivre une puissance maximale, un condensateur de capacité variable C est ajoutée en parallèle de ce dipôle.

18. Exprimer le dipôle équivalent vu par le générateur sous la forme $\underline{Z}_2 = \mathrm{R}_2 + j\mathrm{X}_2$ et écrire R_2 et X_2 en fonction des paramètres du problème. Commenter.

> $$\boxed{R_2 = \frac{R}{(1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}, \qquad \boxed{X_2 = \frac{L\omega(1-LC\omega^2)}{(1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}.$$
>
> La résistance du dipôle dépend de la pulsation. On reconnaît le carré du module de la fonction de transfert d'un filtre passe bas du deuxième ordre. La résistance du dipôle équivalent peut être grande en fonction du facteur de qualité ($R_2 = RQ^2$ pour $\omega = 1/\sqrt{LC}$). La puissance tend toujours vers 0 à haute fréquence mais les pulsations caractéristiques dépendent de C : $\omega \gg 1/\sqrt{LC}$ et $\omega \gg R/L$. La réactance s'annule pour une valeur spécifique $\omega = 1/\sqrt{LC}$, les signaux sont en phase $e(t)$ et $i(t)$ sont donc en phase pour cette valeur, ce qui assure une puissance maximale délivrée par le générateur à cette pulsation.

19. Après avoir fait un schéma du système, appliquer la loi du pont diviseur de courant pour déterminer le courant traversant le dipôle RL en fonction du courant délivré par le générateur $\underline{i}$, de R, L, C et ω.

> Notons $i\prime$ le courant traversant le dipôle RL. En utilisant la loi du pont diviseur de courant en RSF :
>
> $$\underline{i}' = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}\underline{i}$$

20. En utilisant l'expression de l'impédance du dipôle RL série et de la question précédente, exprimer $\underline{e}$ en fonction de $\underline{i}$, R, L, C et ω.

Le dipôle RL est en convention récepteur, le courant le parcourant s'écrit i' et la tension à ses bornes vaut e. L'impédance du dipôle est $\underline{Z}_1$. On en déduit :

$$\underline{e} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}\underline{i}$$

21. Montrer que l'argument de $\underline{e}/\underline{i}$ peut se mettre sous la forme :

$$\arg\left(\frac{\underline{e}}{\underline{i}}\right) = \arctan\left(\frac{\alpha}{\mathrm{y}} - \mathrm{y}\right) - \arctan\left(\mathrm{y}\right), \qquad \text{où } \mathrm{y} = \frac{\omega \mathrm{L}}{\mathrm{R}} \text{ et } \alpha = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{CR}^2}.$$

Multiplier par $-j/-j$ la fraction précédente et prendre l'argument. La fonction arctan est antisymétrique.

22. En déduire que $e(t)$ et $i(t)$ sont en phase pour $C = 1/2L\omega^2$.

Les signaux sont en phase si $\dfrac{\alpha}{y} - y = y$ ce qui mène au résultat proposé.

23. Exprimer la valeur de la puissance délivrée par le générateur dans ce cas. Commenter l'impact de la capacité sur le résultat.