Devoir Surveillé de Physique n°6

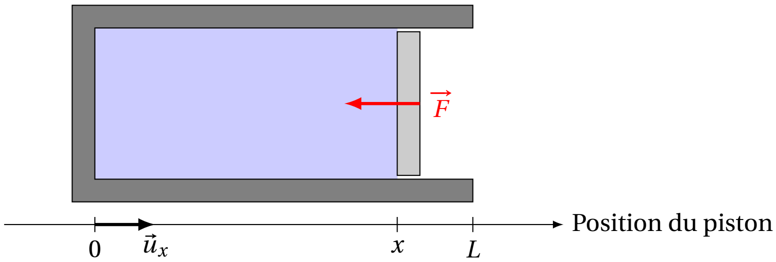
Sujets : Thermodynamique, électromécanique et cristallographie.

Lycée Benjamin Franklin, Lundi 12 Juin 2023

— L'usage d'une calculatrice est interdit.
— Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre que vous voulez.
— Le soin apporté à la rédaction sera valorisé :
  - **schémas** clairs
  - **systèmes** clairement définis
  - **résultats sous forme littérale et encadrés**
  - applications numériques **soulignées**

1 Un cas d'école

On considère une enceinte de longueur L contenant de n moles de gaz. Les parois de l'enceinte sont diathermanes et l'une des extrémité est un piston repéré par sa position x, de surface S, libre de se déplacer suivant l'axe représenté sur le schéma ($x \in [0, L]$).



La transformation est la suivante : le piston se déplace d'une position $x_i = L$ vers une position $x_f = L/10$ sous l'action d'une force $\vec{F} = -F\vec{u}_x$ avec $F > 0$ constante en norme et en direction. On suppose l'évolution lente : a chaque instant, la température du système est égale à celle du milieu extérieur T_{ext} considéré comme un thermostat. A tout instant, le volume occupé par le gaz est $V = Sx$.

Les variables et fonction d'état initiales (respectivement finales) seront indicées i (respectivement f). Le but de l'exercice sera de trouver l'expression du transfert thermique du gaz vers le milieu extérieur.

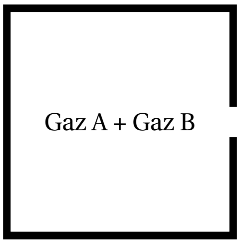
1. Définir les mots diathermane et thermostat. Quel est le type de la transformation ?
2. On suppose que les capacités thermiques à volume constant de l'enceinte et du piston sont faibles devant celle du gaz. Quel système thermodynamique peut-on choisir (plusieurs réponses possibles) ?
3. Quel sera le signe du travail reçu par le système noté W ? Exprimer W en faisant apparaître la norme $F = \|\vec{F}\|$ de la force et vérifiez le résultat intuitif précédent.
(-1 point pour l'écriture "vecteur = scalaire")
4. Comment s'exprime la capacité thermique molaire à volume constant $C_{V,m}$ d'un gaz parfait en fonction de R et de $\gamma = C_p/C_v$ (rapport des capacités thermiques à pression et volume constant) ? Donner la valeur de γ dans le cas d'un gaz parfait diatomique.
5. Quelle(s) condition(s) doit vérifier un gaz pour pouvoir lui appliquer la loi de Joule? Appliquer cette loi sur le gaz en faisant apparaître la capacité thermique **molaire** à volume constant $C_{V,m}$ et la variation de température $\Delta T = T_f - T_i$. Que vaut ΔU dans le cas de cette transformation ?
6. Exprimer le transfert thermique Q reçu par le système au cours de cette transformation en fonction de L et F. Interprétez les résultats.

La transformation est supposée lente. Si la compression est effectuée brutalement entre la position $x_i = L$ et $x_f = L/10$ du piston, la compression suit d'abord une loi polytropique d'ordre γ puis un refroidissement isochore (le transfert thermique n'a pas le temps de s'effectuer au cours de la compression mais seulement après). Le gaz est supposé parfait.

7. Représenter l'ensemble des transformations de cet exercice dans un diagramme de Watt
8. A l'aide du diagramme, expliquer en quoi l'énergie mécanique à fournir au système est plus importante dans le cas d'une compression brutale que dans le cas d'une évolution lente.
9. Exprimer la température atteinte à la fin de la transformation polytropique d'ordre γ en fonction d'un minimum de variables.
10. Le système étudié ressemble fortement à une pompe à vélo ! Proposer dans ce cas des valeurs raisonnables pour $\gamma, L, S, p_i, T_{ext}$ et calculez T_f. On donne $10^{0.4} \simeq 2,5$.

2 Effusion gazeuse

La pechblende est un minerai naturel contenant deux isotopes de l'uranium 235 et 238. L'^{235}U est le seul isotope fissile naturel. Lors du projet Manhattan (première bombe atomique), une technique d'effusion gazeuse reposant sur la loi de Graham a été mise au point dans le but de séparer ces isotopes. La loi de Graham (1833) indique que, pour deux gaz contenus dans une enceinte percée d'un trou de diamètre très faible (très faible devant le libre parcours moyen des molécules de gaz noté $l^\star$), le rapport des vitesses d'effusion des deux gaz (vitesse à laquelle un gaz sort de l'enceinte) est égal à la racine carré de l'inverse du rapport des masses molaires des deux gaz. La théorie cinétique des gaz permet de retrouver cette loi.



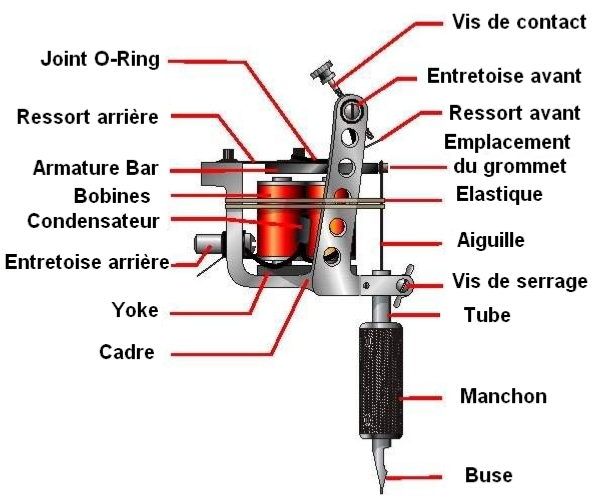
11. Rappeler la différence entre un atome et un élément. Qu'est-ce qu'un isotope? Quel est la masse molaire de l'uranium 235 et 238?
12. Exprimer d'après le texte la loi de Graham pour un mélange de gaz d'Uranium 235 et 238. On utilisera l'indice A pour l'isotope 235 et l'indice B pour l'isotope 238. Les vitesses d'effusions et masses molaires seront donc notées : v_A, v_B, M_A et M_B.
13. Montrer d'après cette loi que le rapport d'effusion entre du dihydrogène et du dioxygène vaut 4.
14. Donner l'expression de la vitesse quadratique notée $v^\star$ d'un gaz en fonction de sa température et de la masse m d'une seule molécule de ce gaz.
15. En déduire l'expression des vitesses quadratiques $v_A^\star$ et $v_B^\star$ en fonction de la température, des masses molaires et de la constante des gaz parfaits.
16. En déduire que le rapport des vitesses d'effusions est égal au rapport des vitesses quadratiques.

On suppose le mélange de gaz d'uranium comme parfait, situé dans une enceinte de volume V percée d'un trou de surface S. Le nombre d'atomes d'uranium 235 est noté N_A, et N_B pour l'uranium 238. On supposera que chaque atome sortant de l'enceinte ne rentrera plus dans l'enceinte, ce qui fait que l'enceinte se vide progressivement.

17. Rappeler la définition d'un gaz parfait. Quelle(s) condition(s) doit satisfaire un gaz réel pour le considérer comme parfait?
18. Quel est le type de système constitue le gaz contenu dans l'enceinte? Ouvert, fermé, isolé?
19. En supposant le gaz d'uranium comme parfait, situé dans une enceinte de volume V percée d'un trou de surface S, exprimer le nombre de molécules de gaz A et B traversant le trou pour un temps élémentaire dt en fonction de la quantité de gaz présent dans l'enceinte $N_A(t)$ et $N_B(t)$, de la vitesse quadratique de chaque gaz et de la surface S du trou et du volume V du réservoir.
20. En déduire que la quantité des deux isotopes présents décroit de manière exponentielle en fonction du temps. On exprimera les deux constantes de temps τ_A et τ_B en fonction des grandeurs apparaissant dans l'exercice.
21. En déduire une relation entre le rapport des constantes de temps et le rapport des masses molaires entre isotopes de l'Uranium.
22. En supposant un mélange équimolaire d'isotopes de l'Uranium initialement contenu dans l'enceinte, en déduire une expression du rapport N_A/N_B en fonction du temps vérifiant :
$$\frac{N_A}{N_B} = \exp\left(-\frac{(\tau_B - \tau_A)}{\tau_A \tau_B}t\right)$$
23. Il ne reste environ qu'un pour-cent de chaque isotopes au bout d'une heure dans l'enceinte. En déduire au bout de quel temps l'Uranium 238 constitue 99% des éléments présents dans l'enceinte. Commentez.
On donne pour l'application numérique $1/(1-\sqrt{235/238}) \simeq 158$.

3 Dermographe

Le dermographe est une machine à tatouer électrique qui fait son apparition à la fin du XIX^{e} siècle et qui est toujours utilisée aujourd'hui (schéma ci-contre pour information).
Afin d'en simplifier l'étude, on s'intéresse à une version simplifiée du dermographe présent sur la figure 1.
On modélise le contact par un arc de cercle conducteur avec lequel la partie mobile peut être en contact via un palet à son extrémité. Au point $S(\theta_S = \pi/60)$, l'arc de cercle se termine. On admet que tant que le contact est assuré, la partie mobile est parcourue par un courant d'intensité I et qu'elle se déplace dans une zone de champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B\vec{u}_z$, avec $B > 0$. Elle est soumise à un couple de rappel de moment $\vec{\Gamma} = -K\theta\vec{u}_z$. Il existe une butée en $\theta = 0$ qui empêche la partie mobile d'accéder à des valeurs négatives de θ.



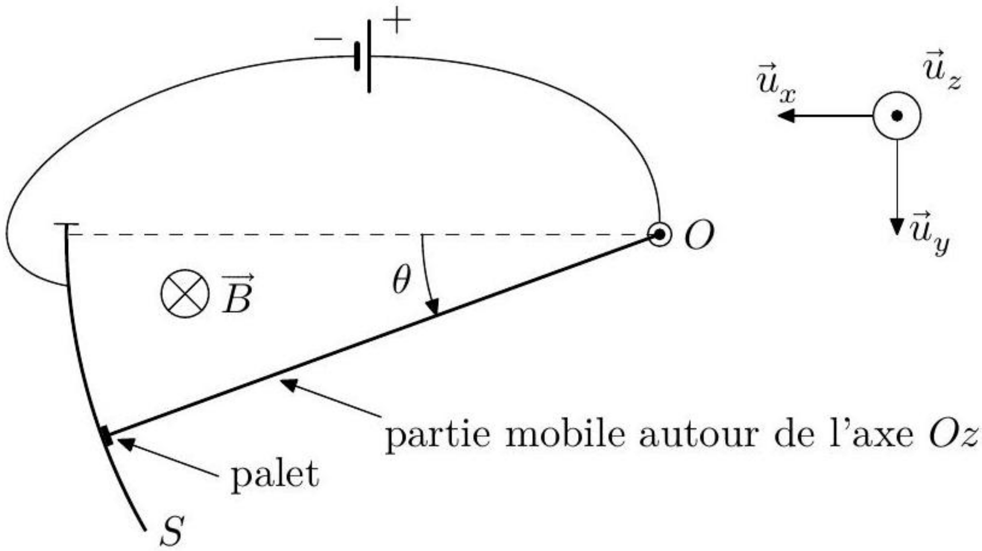


FIGURE 1 – Modélisation simplifiée du dermographe

Caractéristiques du dermographe	
Longueur de la partie mobile	$l = 3$ cm
Moment d'inertie de la partie mobile	$J = 2 \times 10^{-6}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$
Coefficient de rappel	$K = 7 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$
Angle du point extrême de la partie conductrice	$\theta_S = \pi/60$
Nombre de spires par unité de longueur de la bobine	$n = 2 \times 10^3\ \mathrm{m^{-1}}$
Perméabilité magnétique relative du matériau inséré dans la bobine	$\mu_r = 5 \times 10^2$
Courant dans les spires	$I = 1\mathrm{A}$
Constantes	
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6}$ H.m^{-1}

On suppose que l'action du poids est négligeable devant les autres actions mécaniques et que les forces de frottement sont négligeables devant les autres forces mises en jeu. Par ailleurs, on néglige les effets d'induction liés au mouvement de la partie mobile dans le champ magnétique extérieur.

24. Recopier sur la copie le schéma de la figure 1 en indiquant le sens du courant électrique dans la partie mobile, ainsi que la force s'exerçant sur celle-ci lorsqu'elle est parcourue par un courant. Donner le nom et l'expression de cette force.

3.1 Situation initiale

25. Initialement ($t = 0^-$), le générateur n'est pas branché et la partie mobile est au repos. Quelle est alors la position de la partie mobile ? Justifier la réponse.

3.2 Mise sous tension (contact assuré)

26. On met le générateur sous tension à $t = 0^+$. Effectuer un bilan des actions mécaniques sur la partie mobile.
27. Montrer que θ satisfait l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = A$ et exprimer ω_0 et A en fonction de J, K, I, B et l.
28. Par une analyse dimensionnelle, vérifier l'homogénéité de l'expression trouvée pour A.
29. Résoudre l'équation différentielle pour déterminer l'expression de $\theta(t)$ tant que le contact est assuré.
30. Déterminer l'expression de l'instant t_1 pour lequel la partie mobile quitte l'arc conducteur.

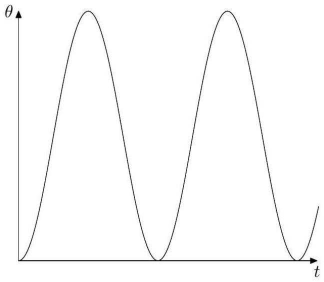
3.3 Rupture du contact fermant le circuit

On pose $t' = t - t_1$. À $t' = 0$, la partie mobile quitte l'arc conducteur, ce qui annule la force magnétique.

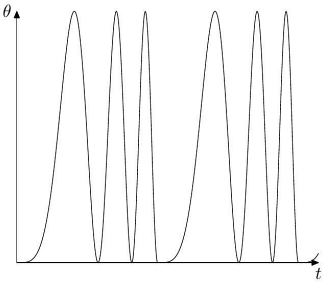
31. Déterminer la nouvelle équation différentielle satisfaite par θ. La résoudre pour déterminer $\theta(t')$ tant que le contact est rompu.
32. On admet que la valeur de l'angle maximal atteint par la partie mobile est de 0,096 rad. En déduire l'amplitude du mouvement de l'aiguille.

3.4 Résumé

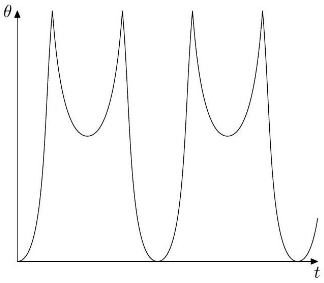
33. Parmi les 4 courbes ci-dessous, choisir, en justifiant, celle représentant θ en fonction du temps. Les courbes ont parfois été tracées en accentuant fortement les caractéristiques : en réalité, les deux phases sont moins différenciées.



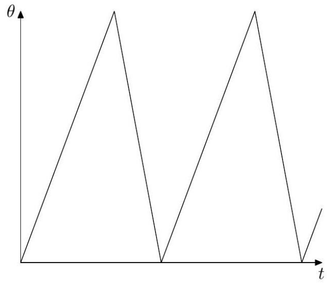
Courbe 1



Courbe 2



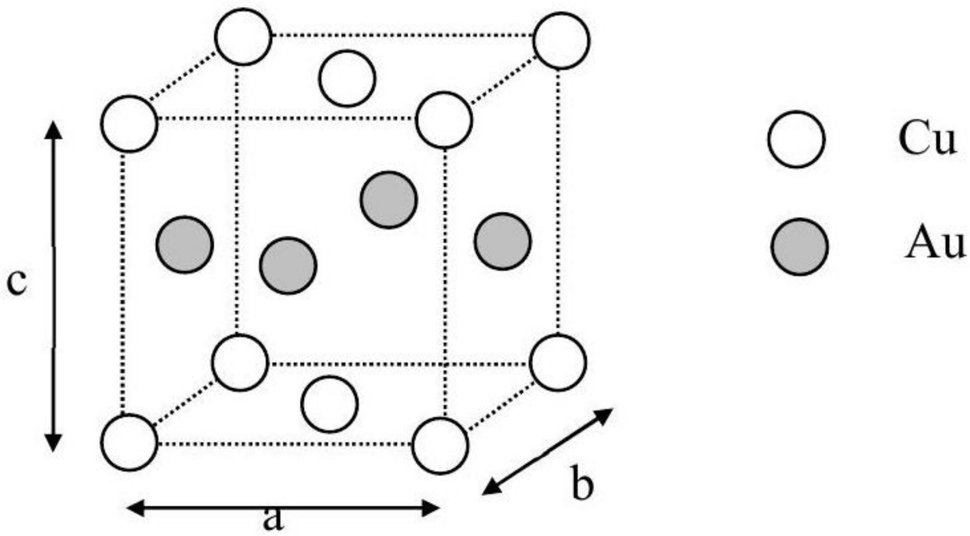
Courbe 3



Courbe 4

4 Alliage cuivre-or

La maille cubique à faces centrées est représentée ci-dessous



La tangence des atomes se fait **suivant les diagonales des faces du parallélépipède**. Les trois angles sont égaux à $\pi/2$ et a = b ≠ c.

34. Quelles sont les valeurs de a, b et c en fonction des rayons R_{Cu} et R_{Au} ?
35. Quels sont les nombres d'atomes de cuivre et d'or par maille ?
36. Quelle est la fraction massique de l'or dans cet alliage ? Exprimer cette fraction en carats.
    Un alliage est à x carats si 24 g d'alliage contiennent x grammes d'or.
37. Quelle est la masse volumique de cet alliage ?

Données : $R_{Cu} = 128$pm, $R_{Au} = 147$pm, $M(Cu) = 63,55$ g. mol^{-1} et $M(Au) = 196,97$ g. mol^{-1}.