

Devoir Surveillé n°5 - PTSI - 27 Mars

Thème : Mécanique - Durée : 4h

Consignes :

- L'usage de la calculatrice est interdit.
- Les expressions littérales seront encadrées, et les applications numériques soulignées en couleur. **Une application numérique sans unité sera considérée fautive.**
- Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, indiquez le sur votre copie. Vérifiez tout de même que l'erreur ne provient pas de vous (homogénéité, ordre de grandeur, etc.).
- Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

1 Chute d'une goutte de pluie

Le but de cet exercice est de déterminer la vitesse limite ou terminale d'une goutte de pluie.

Les gouttes de pluie ont des tailles, des formes et donc des vitesses variées. Elles sont essentiellement de forme sphériques jusqu'à environ 3 mm de diamètre puis se déforment voire éclatent en gouttelettes de tailles variées lors de leur chute. Pour des gouttes sphériques, les lois de vitesse terminale v_t des gouttes se classent en 3 catégories en fonction du rayon R de la goutte¹ :

- $v_t \propto R^2$ pour $R < 40 \mu\text{m}$,
- $v_t \propto R$ pour $40 \mu\text{m} < R < 600 \mu\text{m}$
- $v_t \propto \sqrt{R}$ pour $R > 600 \mu\text{m}$.

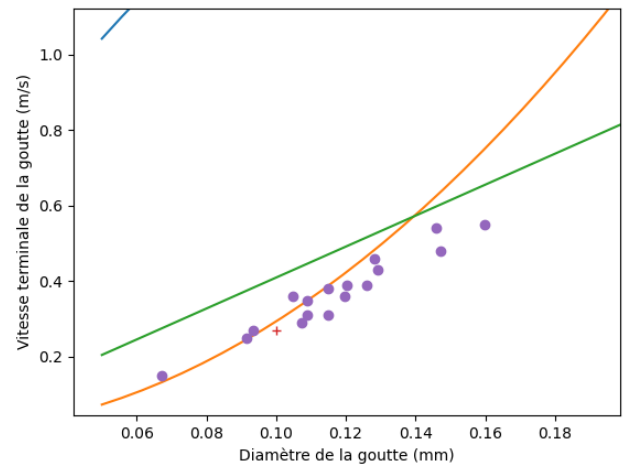
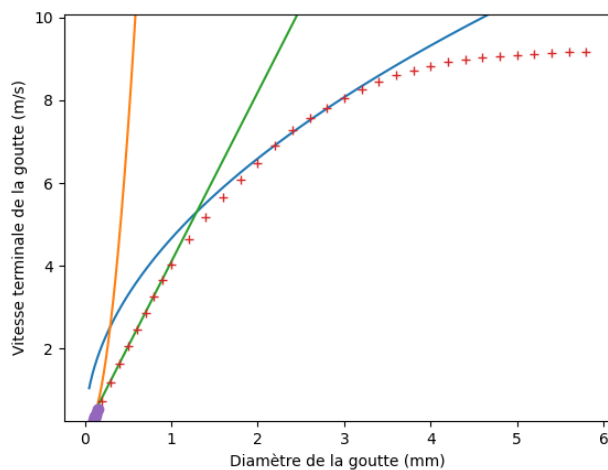


FIGURE 1 – Vitesse terminale de gouttes en fonction de leurs diamètres. Les croix représentent une moyenne faite sur environ 1500 gouttes. Les cercles représentent des mesures uniques. Les courbes sont des modèles théoriques que l'on devra distinguer dans l'exercice.

Ces modèles peuvent être comparés à des données expérimentales², c'est ce qui est représenté sur la figure 1.

1. *Interprétation de la figure.* Pour un nuage à 1 km d'altitude composé de gouttes de diamètre environ égal à $10 \mu\text{m}$, calculer le temps nécessaire à sa chute. Commenter.

La masse volumique de l'eau sera notée $\rho_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, celle de l'air $\rho_a = 1,2 \text{ kg/m}^3$, l'accélération de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ et la viscosité dynamique de l'air $\eta = 19 \times 10^{-6} \text{ Pa s}$.

Le système étudié est une goutte d'eau de forme sphérique de rayon R assimilable à un point matériel. La goutte chute dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen uniquement suivant le vecteur unitaire \vec{u}_z de la base cartésienne dirigé dans le même sens que \vec{g} .

2. Rappeler l'expression des deux forces de frottement fluide vues en cours en précisant les notations utilisées. Le coefficient de proportionnalité sera noté α pour les "faibles vitesses" et β pour les "fortes vitesses".
3. Pour une sphère d'eau de rayon R , exprimer son poids en fonction de son rayon et des constantes du problème.
4. Exprimer la poussée d'Archimède exercée sur une sphère d'eau de rayon R plongée dans l'air en fonction de R et des constantes du problème.
5. Comparer le poids à la poussée d'Archimède. Commenter.

1. Khvorostyanov and J.A. Curry, 2001, Terminal Velocities of Droplets and Crystals : Power Laws with Continuous Parameters over the Size Spectrum, *J. Atmos. Sci.*, **59**.
2. R. Gunn and G.D. Kinzer, 1949, The Terminal Velocity of Fall for Water Droplets in Stagnant Air, *J. Meteor.*, **6**.

Cas des faibles vitesses.

Dans le cas des "faibles vitesses", ou plus précisément, le régime de Stokes, le coefficient de frottement, pour une sphère de rayon R , s'exprime $\alpha = 6\pi\eta R$.

6. Établir l'équation différentielle régissant la vitesse de chute de la goutte. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_t}{\tau},$$

où les expressions de τ et v_t seront données en fonctions des constantes ρ_e , g , R et η . *Note : Une réponse justifiée de manière rigoureuse est attendue; question sur 5 points.*

7. Donner la signification physique de τ et v_t .
8. Commenter l'expression de v_t en fonction de R . Identifier sur la figure 1 le modèle correspondant et le domaine de validité de celui-ci.
9. Donner la solution de cette équation en fonction de v_t et τ puis tracer l'allure de la vitesse de la goutte pour un départ à vitesse nulle. Indiquer la durée nécessaire pour que la goutte atteigne v_t à 1% près. *Note : une figure complète est attendue.*
10. En déduire, par intégration, la position verticale $z(t)$ de la goutte en fonction du temps en fonction de t , τ et v_t .
11. Soit une goutte de rayon $R = 30 \mu\text{m}$. Indiquer la durée nécessaire pour que la goutte atteigne v_t à 1% près. En utilisant la question précédente, en déduire la hauteur de chute nécessaire pour que la goutte atteigne v_t à 1% près. Commenter en utilisant la figure 1.

Cas des vitesses élevées

Dans le cas des "vitesses élevées", ou plus précisément, dans le cas d'un régime turbulent, le coefficient de frottement, pour une sphère de rayon R s'écrit $\beta = \frac{1}{2} C_x \rho_a \pi R^2$ avec $C_x \approx 0,5$ le coefficient de traînée (supposé constant pour la plage de vitesse considérée).

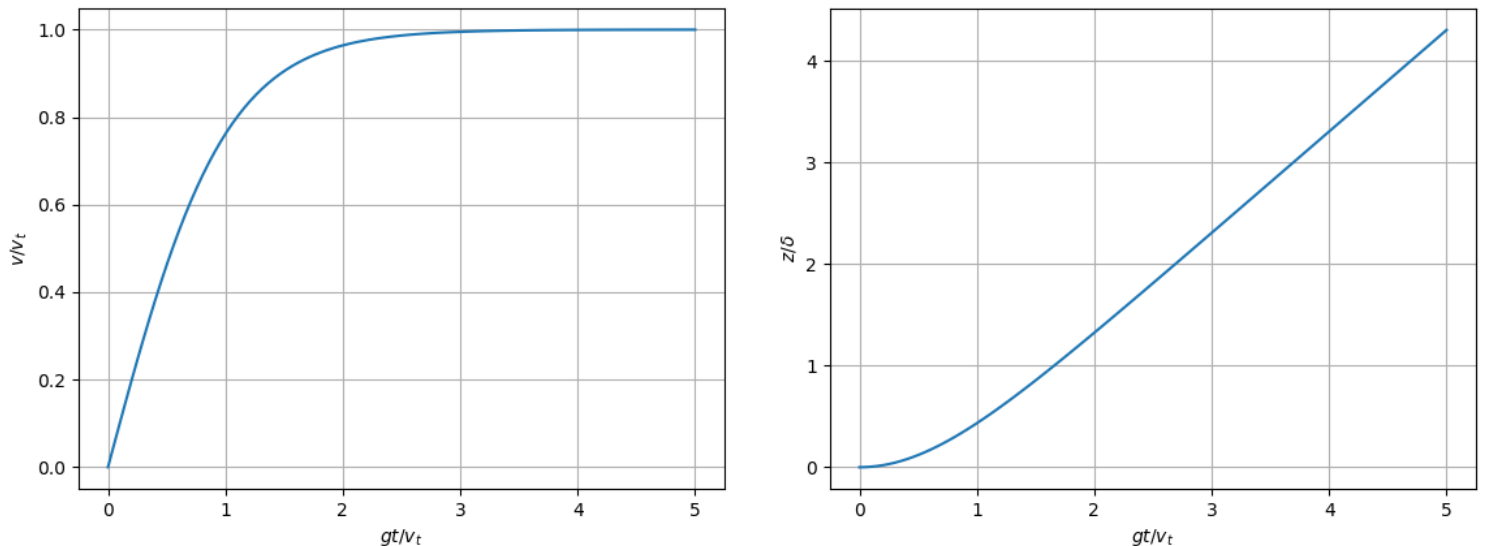


FIGURE 2 – Vitesse et altitude adimensionnée d'une goutte en fonction d'un temps adimensionné dans le cas d'un C_x constant.

12. Établir l'équation différentielle satisfaite par la vitesse d'une goutte de pluie dans le cas des vitesses élevées et la mettre sous la forme

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{\delta} = \frac{v_t^2}{\delta}.$$

Exprimer v_t et δ en fonction de C_x , ρ_a , ρ_e , R et g et préciser la dimension de δ .

13. Commenter l'expression de v_t en fonction de R . Proposer un lien avec la figure 1. Commenter.
14. Pour une goutte de 1,5 mm de rayon, déterminer à partir de la figure 2 et des données de l'énoncé la valeur de v_t , de la durée que met la goutte pour atteindre v_t à 1%, et la distance parcourue pendant cette durée.

Rayon de goutte entre 0,04 mm et 0,6 mm

15. Pour un rayon de goutte R compris entre 0,04 mm et 0,6 mm, la force de frottement est proportionnelle à $(Rv)^\lambda$. Déterminer la valeur de λ en utilisant les informations fournies par l'énoncé.

Rayon de goutte supérieure à 1,5 mm

Pour une goutte de rayon R supérieure à 1,5 mm, la déformation de celle-ci au cours de sa chute doit être prise en compte. Son écart de

forme par rapport à une goutte sphérique en fonction de sa vitesse est pris en compte par le nombre de Weber (introduisant ainsi la tension superficielle de l'eau). La force de traînée s'exprime de manière empirique :

$$\vec{F} = -6\pi\eta RC_d C_t \vec{v}$$

où $C_t = 1 + 0,16Re^{2/3}$, $C_d = 1 + a(We + b)^c - ab^c$ (avec a , b et c des constantes), avec le nombre de Reynolds $Re = \rho_a v D / \eta$ et le nombre de Weber $We = \rho_a v^2 D / \sigma$ (σ la tension de surface de l'eau).

Le code python à compléter ci-dessous permet d'obtenir numériquement la position et la vitesse de la goutte en tenant compte de l'expression de cette force de frottement.

```

from math import pi
# Définition des constantes du problème
g = 9.81
rho_e = 1e3
eta = 1.81e-5
rho_a = 1.22
sigma = 0.073 # Tension de surface pour l'eau
# Définition de la masse de la goutte
def m(D):
    ... ZONE 1 ...
# Définition du nombre de Reynolds
def Re(v,D):
    return rho_a * v * D / eta
# Définition du nombre de Weber
def We(v,D):
    return rho_a * v ** 2 * D / sigma
# Expression empirique du coefficient de traînée
def Ct(v,D):
    return 1 + 0.16 * Re(v,D) ** ( 2 / 3 )

# Terme de modification du coefficient de traînée
# (déformation de la goutte)
def Cd(v,D):
    a , b , c = 0.013 , 2.28 , 2.12
    return 1 + a * ( We(v,D) + b ) ** c - a * b ** c
# Définition de la force de traînée
def F(v,D):
    ... ZONE 2 ...
# Méthode d'Euler pour calculer la distance parcourue
def Euler(D,z0,v0,ttot,N):
    dt = ttot/(N-1) # Pas de temps
    t = [0] # Condition initiale pour la liste de temps
    v = [v0] # Condition initiale pour la vitesse verticale
    z = [z0] # Condition initiale pour la position verticale
    for i in range(N-1):
        ... ZONE 3 ...
        ... ZONE 4 ...
        ... ZONE 5 ...
    return t , z , v

```

16. Proposer une expression (*en écriture python bien entendu*) pour les zones à compléter 1 et 2.
17. Proposer une expression pour la zone 3. Cette ligne permet d'ajouter à la liste des vitesses verticales la nouvelle valeur prise par la vitesse lorsque le temps a été à nouveau incrémenté. La fonction `L.append(e)` qui rajoute l'élément `e` à la fin de la liste `L` pourra être utilisé.
18. Proposer une expression pour la zone 4. Cette ligne permet d'ajouter à la liste des positions verticales successives de la goutte la nouvelle valeur prise par la position lorsque le temps a été à nouveau incrémenté.
19. Proposer une expression pour la zone 5. Cette ligne permet d'ajouter à la liste des temps la nouvelle valeur prise par le temps lors d'un nouvel incrément.
20. Retrouver v_t pour $R = 2$ mm ainsi que l'ordre de grandeur de la distance parcourue par la goutte permettant d'atteindre v_t avec un écart de moins de 5%.

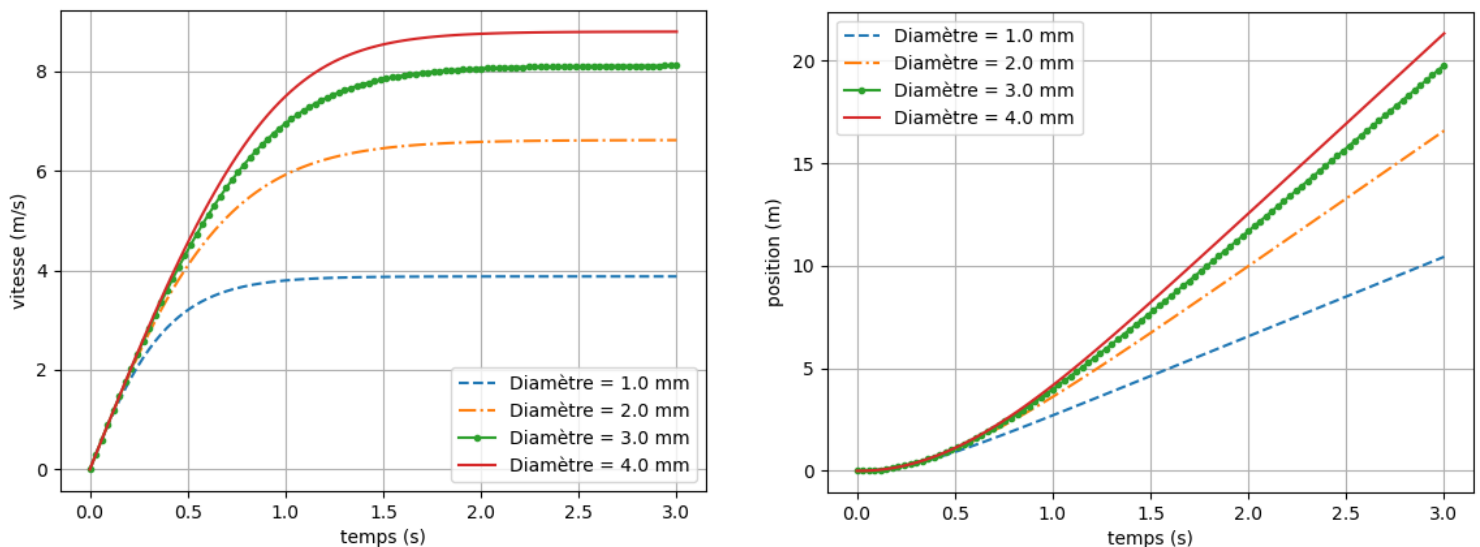


FIGURE 3 – Vitesse et altitude de gouttes de différents diamètres initiaux en fonction du temps obtenu avec la fonction `Euler(D,0,0,3,100)` définie dans le code proposé dans l'énoncé pour $D=1e-3$ puis $D=2e-3$ puis $D=3e-3$ puis $D=4e-3$.

2 Un pilote d'aéroglesseur qui aime les bosses

Un pilote d'aéroglesseur s'amuse à prendre une bosse. La masse de l'ensemble est de $m = 200 \text{ kg}$ et les hélices délivrent une puissance totale de $P = 2000 \text{ W}$. On suppose que l'aéroglesseur ne subit aucun frottements (du sol ou de l'air) et que la totalité de la puissance délivrée par les hélices lui sert à avancer. La première partie de son mouvement est horizontale, les phases suivantes correspondent à une montée puis une descente comme représenté sur la figure 4. On rappelle que $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

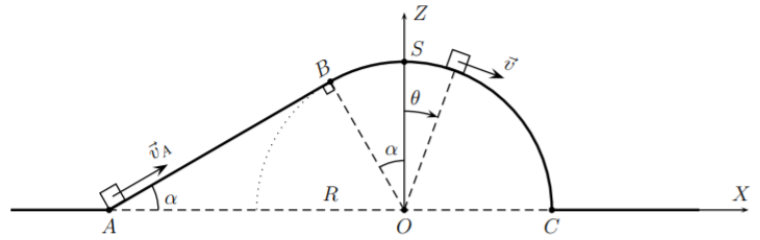


FIGURE 4 – Photo du pilote et de son aéroglesseur à gauche et schématisation de la piste parcourue par l'aéroglesseur à droite.

2.1 Phase d'accélération

21. Rappeler le lien entre travail et puissance.
22. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.
23. Combien de temps sera nécessaire pour que l'aéroglesseur atteigne une vitesse de $v_A = 20 \text{ m/s}$? Un résultat analytique en fonction des données du problème puis une application numérique sont attendus.

Le pilote coupe le moteur au début de la bosse en A (les hélices seront à l'arrêt à partir de ce point). La vitesse de l'aéroglesseur au début de la bosse en A est de v_A . Dans cette partie on étudie le mouvement de l'aéroglesseur sur la piste composée d'une portion rectiligne AB et inclinée d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, de rayon $R = 2 \text{ m}$ et d'angle $\widehat{BOC} = \pi/2 + \alpha$ (cf figure 4). L'orientation positive des angles sera prise dans le sens horaire.

2.2 Portion rectiligne AB

24. Énoncer le théorème de l'énergie mécanique.
25. En déduire l'expression littérale de la vitesse v_B au point B en supposant que ce point est bien atteint.
26. Afin que B soit effectivement atteint par l'aéroglesseur, il est nécessaire que $v_A > v_{A,l}$. Déterminer l'expression littérale puis numérique de v_A .

Pour les questions suivantes, on suppose la condition précédente vérifiée.

2.3 Portion circulaire BC

27. Énoncer le principe fondamental de la dynamique.
28. En déduire l'expression en fonction de θ , $\dot{\theta}$ et des constantes m , g et R de la réaction normale \vec{R}_N du support lors de la phase du mouvement sur l'arc BC.
29. Déterminer la relation liant v , θ et v_B . On pourra utiliser une méthode énergétique.
30. En déduire \vec{R}_N en fonction des constantes, θ et v_A .
31. À quelle condition sur v_A (expression littérale puis numérique) n'y aura-t-il pas de décollage de M avant le sommet S?
32. La condition précédente étant vérifiée, déterminer l'expression θ_D de θ pour laquelle l'aéroglesseur quitte la piste.
33. Déterminer l'expression de la vitesse pour $\theta = \theta_D$.

2.4 Atterrissage

On étudie maintenant le mouvement entre le moment où l'aéroglesseur a décollé et celui où il va toucher le sol. On se place dans le repère cartésien OXZ.

34. Écrire les conditions initiales en fonction de R , θ_D et v_D .
35. Déterminer l'abscisse de la position où l'aéroglesseur va entrer en collision avec le sol.

*** Fin du sujet ***