Devoir Surveillé n°5 - PTSI - 27 Mars

Thème : Mécanique - Durée : 4h

Consignes :
- L'usage de la calculatrice est interdit.
- Les expressions littérales seront encadrées, et les applications numériques soulignées en couleur. **Une application numérique sans unité sera considérée fausse**.
- Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, indiquez le sur votre copie. Vérifiez tout de même que l'erreur ne provient pas de vous (homogénéité, ordre de grandeur, etc.).
- Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

1 Chute d'une goutte de pluie

Le but de cet exercice est de déterminer la vitesse limite ou terminale d'une goutte de pluie.
Les gouttes de pluie ont des tailles, des formes et donc des vitesses variées. Elles sont essentiellement de forme sphériques jusqu'à environ 3 mm de diamètre puis se déforment voir éclatent en gouttelettes de tailles variées lors de leur chute. Pour des gouttes sphériques, les lois de vitesse terminale v_t des gouttes se classent en 3 catégories en fonction du rayon R de la goutte [1] :

- $v_t \propto R^2$ pour $R < 40$ µm,
- $v_t \propto R$ pour 40 µm $< R < 600$ µm
- $v_t \propto \sqrt{R}$ pour $R > 600$ µm.

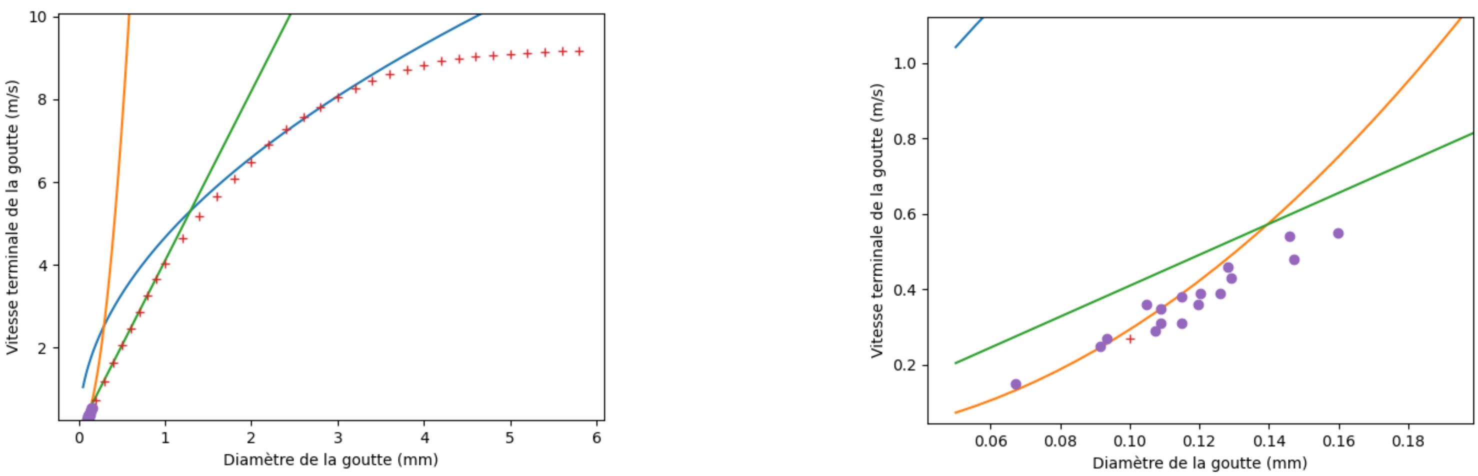

FIGURE 1 – Vitesse terminale de gouttes en fonction de leurs diamètres. Les croix représentent une moyenne faite sur environ 1500 gouttes. Les cercles représentent des mesures uniques. Les courbes sont des modèles théoriques que l'on devra distinguer dans l'exercice.

Ces modèles peuvent être comparés à des données expérimentales [2], c'est ce qui est représenté sur la figure 1.

1. *Interprétation de la figure.* Pour un nuage à 1 km d'altitude composé de gouttes de diamètre environ égal à 10 µm, calculer le temps nécessaire à sa chute. Commenter.

> Pour une vitesse légèrement inférieure à $(1/10)^2 \times 0{,}3$ m/s (la vitesse est en D^2, nous avons accès à la vitesse pour 0,1 mm, il faut donc diviser par 100 environ la vitesse lue), les gouttes de cette taille mettent environ 100 × 1 heure (4×10^4 s) pour chuter de 1 km. Nous percevons les nuages comme suspendus/immobiles lorsqu'il n'y a pas de vents.
> $v \propto D^2$ et lecture, **[1]**
> calcul et interprétation même si oubli de D^2 **[1]**
> Les mouvements convectifs des masses d'air, négligés ici, ont plus de chance de gouverner le mouvement des nuages.

La masse volumique de l'eau sera notée $\rho_e = 1{,}0 \times 10^3$ kg/m^3, celle de l'air $\rho_a = 1{,}2$ kg/m^3, l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}8$ m s^{-2} et la viscosité dynamique de l'air $\eta = 19 \times 10^{-6}$ Pa s.

Le système étudié est une goutte d'eau de forme sphérique de rayon R assimilable à un point matériel. La goutte chute dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}$ supposé galiléen uniquement suivant le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ de la base cartésienne dirigé dans le même sens que $\vec{g}$.

2. Rappeler l'expression des deux forces de frottement fluide vues en cours en précisant les notations utilisées. Le coefficient de proportionnalité sera noté α pour les "faibles vitesses" et β pour les "fortes vitesses".

---
1. Khvorostyanov and J.A. Curry, 2001, Terminal Velocities of Droplets and Crystals : Power Laws with Continuous Parameters over the Size Spectrum, *J. Atmos. Sci.*, **59**.
2. R. Gunn and G.D. Kinzer, 1949, The Terminal Velocity of Fall for Water Droplets in Stagnant Air, *J. Meteor.*, **6**.

$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ et $\vec{f} = -\beta v\vec{v}$, avec $v > 0$ la vitesse et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du système dans un référentiel donné. **[2]**

3. Pour une sphère d'eau de rayon R, exprimer son poids en fonction de son rayon et des constantes du problème.

Le poids (et non pas la masse) a pour expression $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e \vec{g}$. **[1]**

4. Exprimer la poussée d'Archimède exercée sur une sphère d'eau de rayon R plongée dans l'air en fonction de R et des constantes du problème.

La poussée d'Archimède a pour expression $-\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a \vec{g}$. **[1]**

5. Comparer le poids à la poussée d'Archimède. Commenter.

Le rapport du poids et de la poussée d'Archimède vaut $\rho_e/\rho_a \simeq 1\times 10^3$. La poussée d'Archimède, environ 1000 fois plus faible que le poids, peut être négligée. **[1]**
On peut donc s'attendre à avoir des résultats valides même à 3 chiffres significatifs. **[+1]**

Cas des faibles vitesses.
Dans le cas des "faibles vitesses", ou plus précisément, le régime de Stokes, le coefficient de frottement, pour une sphère de rayon R, s'exprime $\alpha = 6\pi\eta R$.

6. Établir l'équation différentielle régissant la vitesse de chute de la goutte. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_t}{\tau},$$

où les expressions de τ et v_t seront donnés en fonctions des constantes ρ_e, g, R et η. *Note : Une réponse justifiée de manière rigoureuse est attendue; question sur 5 points.*

Système : goutte d'eau assimilable à un point matériel **[1/2]**
Référentiel : Terrestre supposé Galiléen **[1/2]**
Schéma : point matériel + axe (Oz) + vecteur unitaire orienté vers le bas + abscisse de la goutte en z + poids + force de frottement **[1]**
Bilan des forces (ou schéma) **[1/2]**
"Principe fondamental de la dynamique" ou "deuxième loi de Newton" **[1/2]**
Projection sur $\vec{u}_z$ et notation $\dot{z} = v$: $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \alpha v$ **[1]**
Diviser par $m = \frac{4}{3}\pi\rho_e R^3$ puis identifier $\tau = \frac{m}{\alpha} = \frac{2\rho_e R^2}{9\eta}$ et $v_t = \frac{mg}{\alpha} = \frac{2g\rho_e R^2}{9\eta}$. **[1]**

7. Donner la signification physique de τ et v_t.

τ est la constante de temps caractéristique du régime transitoire caractérisant la vitesse de la goutte. $v_t = mg/\alpha$ est la vitesse limite atteinte par la goutte (régime permanent, accélération nulle). **[1]**

8. Commenter l'expression de v_t en fonction de R. Identifier sur la figure 1 le modèle correspondant et le domaine de validité de celui-ci.

v_t est proportionnel à R^2. Cette approximation est valable d'après l'énoncé pour les rayons de goutte inférieurs à 40 µm. **[1]**
La courbe correspondante est la courbe orange (reproduire l'allure sur votre copie pour un sujet imprimé en noir et blanc). **[1]**

9. Donner la solution de cette équation en fonction de v_t et τ puis tracer l'allure de la vitesse de la goutte pour un départ à vitesse nulle. Indiquer la durée nécessaire pour que la goutte atteigne v_t à 1% près *Note : une figure complète est attendue.*

Pour une vitesse initiale nulle, $v(t) = v_t\left(1 - \exp(-t/\tau)\right)$. **[1]**
Figure : nommer les axes (v,t), allure en exponentielle décroissante (avec v_t positif), τ et 5τ apparaissent sur le schéma, 0, $0,99v_t$ et v_t apparaissent sur le schéma **[0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5]**

10. En déduire, par intégration, la position verticale $z(t)$ de la goutte en fonction du temps en fonction de t, τ et v_t.

$z(t) = v_t(t-\tau) + v_t\tau\exp(-t/\tau)$ **[1]**

11. Soit une goutte de rayon $R = 30$ µm. Indiquer la durée nécessaire pour que la goutte atteigne v_t à 1% près. En utilisant la question précédente, en déduire la hauteur de chute nécessaire pour que la goutte atteigne v_t à 1% près. Commenter en utilisant la figure 1.

Calcul de $5\tau \simeq 5\times10^{-2}$ s. **[1]**
En reportant dans l'expression de $z(t)$, $z(5\tau) \simeq 4v_t\tau = 4g\tau^2 \simeq 4\times10^{-3}$ m. **[1]**
Les gouttes de cette taille atteignent leur vitesse limite au bout de 4 millimètres. Les vitesses atteintes sont de l'ordre de 0,1 m/s, ce qui est un bon ordre de grandeur en comparaison du point expérimental de la goutte de diamètre 68 µm (rayon 34 µm, vitesse 0,15 m/s) sur la figure 1. **[1]**

Cas des vitesses élevées

Dans le cas des "vitesses élevées", ou plus précisément, dans le cas d'un régime turbulent, le coefficient de frottement, pour une sphère de rayon R s'écrit $\beta = \frac{1}{2}C_x\rho_a\pi R^2$ avec $C_x \simeq 0,5$ le coefficient de trainée (supposé constant pour la plage de vitesse considérée).

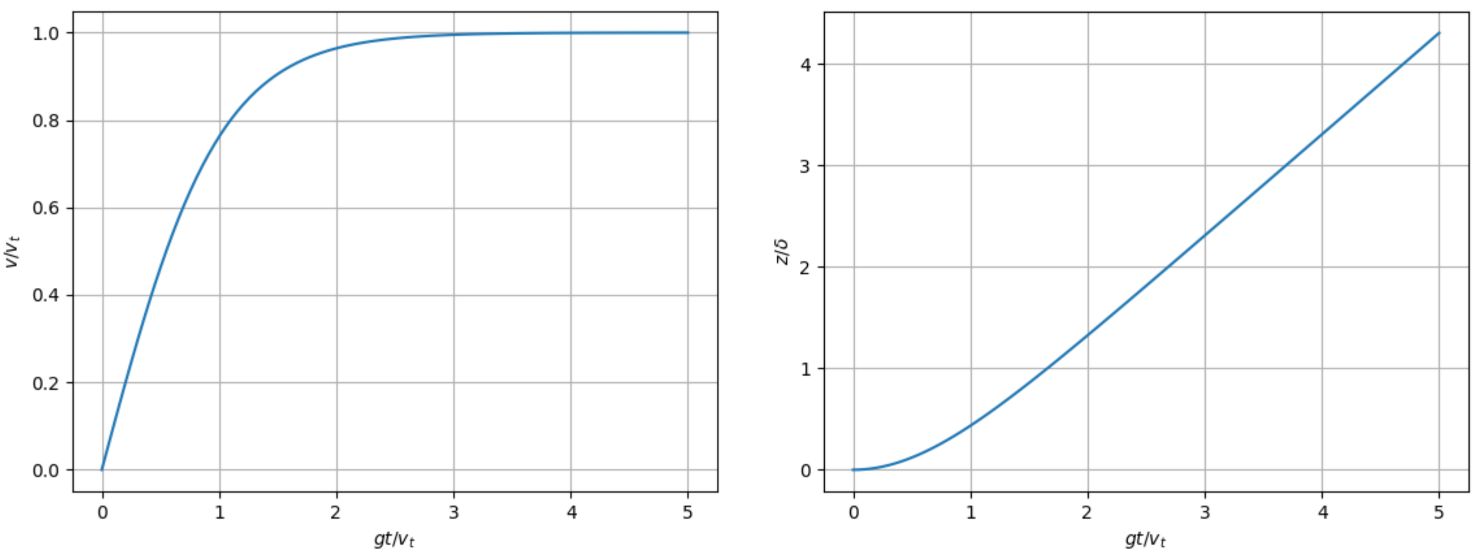

FIGURE 2 – Vitesse et altitude adimensionnée d'une goutte en fonction d'un temps adimensionné dans le cas d'un C_x constant.

12. Établir l'équation différentielle satisfaite par la vitesse d'une goutte de pluie dans le cas des vitesses élevées et la mettre sous la forme
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v^2}{\delta} = \frac{v_t^2}{\delta}.$$
Exprimer v_t et δ en fonction de C_x, ρ_a, ρ_e, R et g et préciser la dimension de δ.

Schéma ou bilan des forces en utilisant le vecteur $\vec{u}_z$. **[1]**
PFD et projection, équations homogènes (0/1 si vecteur = scalaire) **[1]**
$\delta = \frac{8\rho_e}{3C_x\rho_a}R$ et $v_t = \sqrt{\delta g}$.

13. Commenter l'expression de v_t en fonction de R. Proposer un lien avec la figure 1. Commenter.

$v_t \propto \sqrt{R}$ ce qui correspond à la courbe bleu. **[1]**
Cette loi semble valable expérimentalement pour les gouttes de rayon compris entre 0,6 et 1,5 mm (figure et énoncé). Au delà de 1,5 mm les gouttes se déforment et ne sont plus sphériques ce qui peut expliquer l'écart à la courbe bleu. **[1]**
Pour une goutte comprise entre 0,04 et 0,6 mm de rayon, le régime est intermédiaire entre un régime laminaire et turbulent, le coefficient de trainé C_x varie.

14. Pour une goutte de 1,5 mm de rayon, déterminer à partir de la figure 2 et des données de l'énoncé la valeur de v_t, de la durée que met la goutte pour atteindre v_t à 1%, et la distance parcourue pendant cette durée.

AN : $\delta \simeq 7$ m, $v_t \simeq 8$ m/s (compatible avec la figure 1). **[1]**
D'après la figure 2, la vitesse limite adimensionnée est atteinte à 1% au bout d'une durée de $(2,5 \pm 0,5) v_t/g$ (AN : entre 2 et 3 secondes) soit une distance parcourue de $2,3 \pm 0,5\delta$ (AN : entre 15 et 25 mètres). **[2]**

Rayon de goutte entre 0,04 mm et 0,6 mm

15. Pour un rayon de goutte R compris entre 0,04 mm et 0,6 mm, la force de frottement est proportionnelle à $(Rv)^\lambda$. Déterminer la valeur de λ en utilisant les informations fournies par l'énoncé.

En utilisant le PFD pour un mouvement uniforme et l'expression de la vitesse en fonction de R la vitesse terminale vérifie $(Rv)^\lambda \propto R^{2\lambda} \propto mg \propto R^3$ soit $\lambda = 3/2$. La force est proportionnelle à $v^{3/2}$ **[2]**

Rayon de goutte supérieure à 1,5 mm

Pour une goutte de rayon R supérieur à 1,5 mm, la déformation de celle-ci au cours de sa chute doit être prise en compte. Son écart de forme par rapport à une goutte sphérique en fonction de sa vitesse est pris en compte par le nombre de Weber (introduisant ainsi la tension superficielle de l'eau). La force de traînée s'exprime de manière empirique :

$$\vec{F} = -6\pi\eta R C_d C_t \vec{v}$$

où $C_t = 1 + 0,16\mathrm{Re}^{2/3}$, $C_d = 1 + a(\mathrm{We} + b)^c - ab^c$ (avec a, b et c des constantes), avec le nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = \rho_a v D/\eta$ et le nombre de Weber $\mathrm{We} = \rho_a v^2 D/\sigma$ (σ la tension de surface de l'eau).
Le code python à compléter ci-dessous permet d'obtenir numériquement la position et la vitesse de la goutte en tenant compte de l'expression de cette force de frottement.

```python
from math import pi
# Définition des constantes du problème
g = 9.81
rho_e = 1e3
eta = 1.81e-5
rho_a = 1.22
sigma = 0.073 # Tension de surface pour l'eau
# Définition de la masse de la goutte
def m(D):
        ... ZONE 1 ...
# Définition du nombre de Reynolds
def Re(v,D):
    return rho_a * v * D / eta
# Définition du nombre de Weber
def We(v,D):
    return rho_a * v ** 2 * D / sigma
# Expression empirique du coefficient de trainée
def Ct(v,D):
    return 1 + 0.16 * Re(v,D) ** ( 2 / 3 )
```

```python
# Terme de modification du coefficient de trainée
# (déformation de la goutte)
def Cd(v,D):
    a , b , c = 0.013 , 2.28 , 2.12
    return 1 + a * ( We(v,D) + b ) ** c - a * b ** c
# Définition de la force de trainée
def F(v,D):
        ... ZONE 2 ...
# Méthode d'Euler pour calculer la distance parcourue
def Euler(D,z0,v0,ttot,N):
    dt = ttot/(N-1) # Pas de temps
    t = [0] # Condition initiale pour la liste de temps
    v = [v0] # Condition initiale pour la vitesse verticale
    z = [z0] # Condition initiale pour la position verticale
    for i in range(N-1):
        ... ZONE 3 ...
        ... ZONE 4 ...
        ... ZONE 5 ...
    return t , z , v
```

16. Proposer une expression (*en écriture python bien entendu*) pour les zones à compléter 1 et 2.

Zone 1 : `return rho_e * pi * D ** 3 / 6`
Zone 2 : `return 3 * pi * eta * D * Ct(v,D) * Cd(v,D) * v`
écriture du "return" **[0,5]**
+ expression de la masse exacte **[0,5]**
+ expression force exacte, **[1]**

écriture n'est pas en python. **[-0,5]**

17. Proposer une expression pour la zone 3. Cette ligne permet d'ajouter à la liste des vitesses verticales la nouvelle valeur prise par la vitesse lorsque le temps a été à nouveau incrémenté. La fonction `L.append(e)` qui rajoute l'élément `e` à la fin de la liste `L` pourra être utilisé.

```
v.append(v[-1] + ( g - ( F(v[-1],D) / m(D) ) ) * dt)
```

Présence de `v[-1]+`, **[0,5]**
présence de `v[-1]` dans F, **[0,5]**
utilisation du PFD "g-F/m", **[0,5]**
présence du pas de temps. **[0,5]**

18. Proposer une expression pour la zone 4. Cette ligne permet d'ajouter à la liste des positions verticales successives de la goutte la nouvelle valeur prise par la position lorsque le temps a été à nouveau incrémenté.

```
z.append(z[-1] + v[-2] * dt)
```

Présence de z, v et dt [1], utilisation des indices -1 et -2. **[1]**

19. Proposer une expression pour la zone 5. Cette ligne permet d'ajouter à la liste des temps la nouvelle valeur prise par le temps lors d'un nouvel incrément.

`t.append(t[-1] + dt).` **[1]**
Utilisation correcte de `append` pour les trois zones. **[1]**

20. Retrouver v_t pour $R = 2$ mm ainsi que l'ordre de grandeur de la distance parcourue par la goutte permettant d'atteindre v_t avec un écart de moins de 5%.

Par lecture graphique :
9 m/s pour v_t et 1,5 s environ pour la durée permettant d'atteindre v_t avec un écart de moins de 5%. **[1]**
La distance parcourue est de 8 m environ **[1]**

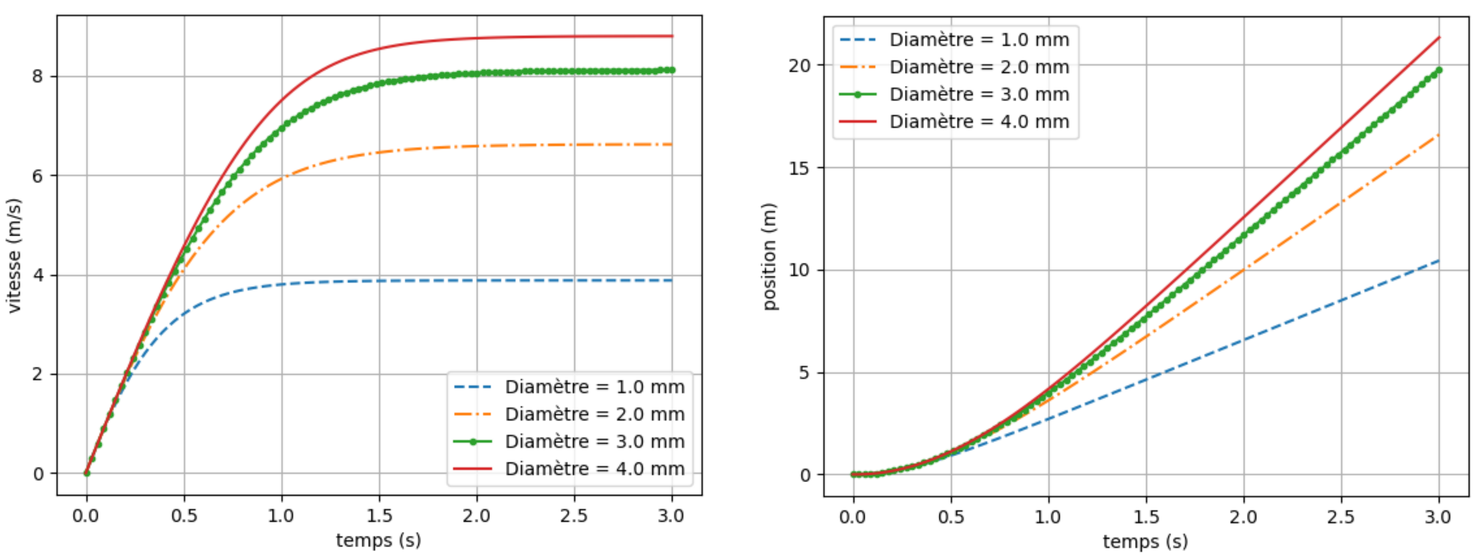

FIGURE 3 – Vitesse et altitude de gouttes de différents diamètres initiaux en fonction du temps obtenu avec la fonction `Euler(D,0,0,3,100)` définie dans le code proposé dans l'énoncé pour `D=1e-3` puis `D=2e-3` puis `D=3e-3` puis `D=4e-3`.

2 Un pilote d'aéroglisseur qui aime les bosses

Un pilote d'aéroglisseur s'amuse à prendre une bosse. La masse de l'ensemble est de $m = 200$ kg et les hélices délivrent une puissance totale de $P = 2000$ W. On suppose que l'aéroglisseur ne subit aucun frottements (du sol ou de l'air) et que la totalité de la puissance délivrée par les hélices lui sert à avancer. La première partie de son mouvement est horizontal, les phases suivantes correspondent à une montée puis une descente comme représenté sur la figure 4. On rappel que $g = 9,81$ m/s^2.

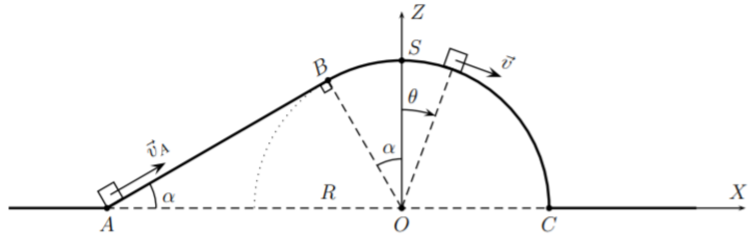

FIGURE 4 – Photo du pilote et de son aéroglisseur à gauche et schématisation de la piste parcourue par l'aéroglisseur à droite.

2.1 Phase d'accélération

21. Rappeler le lien entre travail et puissance.

La puissance correspond à la dérivée temporelle du travail. **[1]**

22. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

Réf Galiléen **[0,5]**
pour un point matériel **[0,5]**
le travail W des forces extérieures qui lui sont appliqué est relié à la variation de l'énergie cinétique ΔE_c, **[introduction des notations 0.5]**
par $\Delta E_c = W$. **[0,5]**
Invoquer $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ comme étant théorème est pénalisé **[-0,5]**

23. Combien de temps sera nécessaire pour que l'aéroglisseur atteigne une vitesse de $v_A = 20$ m/s? Un résultat analytique en fonction des données du problème puis une application numérique sont attendus.

Le poids et la réaction du support sont orthogonaux au vecteur vitesse (piste horizontale) donc il n'y a pas de travail associé à ces forces. **[1]**
La puissance des hélices étant constante durant la phase d'accélération, en appliquant le TEC à l'aéroglisseur considéré comme point matériel dans le référentiel terrestre supposé galiléen, $\Delta E_c = P\delta t$, avec Δt la durée mise par l'aéroglisseur pour atteindre la vitesse v_A et ΔE_c la variation d'énergie cinétique entre l'instant initial (vitesse supposée nulle (choix "logique" mais à indiquer car non précisé dans l'énoncé)). **[2]**
A.N $\Delta t = \frac{mv_A^2}{2P} = 20$ s. **[1]**

Le pilote coupe le moteur au début de la bosse en A (les hélices seront à l'arrêt à partir de ce point). La vitesse de l'aéroglisseur au début de la bosse en A est de v_A. Dans cette partie on étudie le mouvement de l'aéroglisseur sur la piste composée d'une portion rectiligne AB et inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, de rayon $R = 2m$ et d'angle $\widehat{BOC} = \pi/2 + \alpha$ (cf figure 4). L'orientation positive des angles sera prise dans le sens horaire.

2.2 Portion rectiligne AB

24. Énoncer le théorème de l'énergie mécanique.

Réf Galiléen **[0,5]**
pour un point matériel **[0,5]**
le travail W_{nc} des forces extérieures non conservatives qui lui sont appliqué est relié à la variation de son énergie mécanique ΔE_m **[introduction des notations 0,5]**
par $\Delta E_m = W_{\text{nc}}$. **[0,5]**
Invoquer $E_m = E_c + E_p$ comme théorème est pénalisé **[-0,5]**

25. En déduire l'expression littérale de la vitesse v_B au point B en supposant que ce point est bien atteint.

Toujours aucune force non conservative (réaction du support normale à la trajectoire et frottements avec l'air nuls). **[1]** **[hypothèse TEM 1]**
L'énergie mécanique est conservée entre A et B, **[0.5]**
$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gR\cos(\alpha)}$ en supposant le terme dans la racine positif (B est bien atteint). **[1]**

26. Afin que B soit effectivement atteint par l'aéroglisseur, il est nécessaire que $v_A > v_{A,l}$. Déterminer l'expression littérale puis numérique de v_A.

$v_{A,l} = \sqrt{2gR\cos(\alpha)}$. **[0,5]**
A.N : $v_{A,l} \simeq 6-7$ m/s **[1]**

Pour les questions suivantes, on suppose la condition précédente vérifiée.

2.3 Portion circulaire BC

27. Énoncer le principe fondamental de la dynamique.

Réf Galiléen **[0,5]**
pour un point matériel **[0,5]**
la somme/résultante des forces extérieures $\vec{F}_{\text{ext}}$ est reliée au vecteur accélération $\vec{a}$ du point matériel dans le référentiel **[introduction des notations 0,5]**
par $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{ext}}$. **[0,5]**
L'oubli des flèches sur les vecteurs est pénalisé. **[-0,5]**

28. En déduire l'expression en fonction de θ, $\dot{\theta}$ et des constantes m, g et R de la réaction normale $\vec{R}_N$ du support lors de la phase du mouvement sur l'arc BC.

Introduction des notations pour les forces, les coordonnées, la base (texte ou schéma). **[2]**
Hypothèse du PFD et PFD $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N$. **[1]**
Projection dans la base cylindrique (attention à l'orientation de θ, le sens positif est horaire, $\vec{u}_\theta$ est suivant $\vec{e}_x$ en S).
$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \|\vec{R}_N\|/m - g\cos(\theta)$ et $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = g\sin(\theta)$. Dans le cas où l'aéroglisseur suit la piste (qu'il ne décolle pas), la distance r est constante et égale à R ce qui permet de simplifier les équations. **[hypothèse 0,5]**
$-R\dot{\theta}^2 = \|\vec{R}_N\|/m - g\cos(\theta)$ et $R\ddot{\theta} = g\sin(\theta)$. **[projection, signes 1]**
Soit $\|\vec{R}_N\| = mg\cos(\theta) - mR\dot{\theta}^2$. **[formule 1]**
Une formule non homogène est pénalisé. **[-0,5]**

29. Déterminer la relation liant v, θ et v_B. On pourra utiliser une méthode énergétique.

Hypothèse et théorème énergétique (TEC, TEM) **[0,5]**
$v = \sqrt{v_B^2 - 2gR(\cos(\theta) - \cos(\alpha))}$ **[1]**

30. En déduire $\vec{R}_N$ en fonction des constantes du problème, de v_A et de la variable θ.

Comme $v = R\dot{\theta}$, en substituant $\dot{\theta}^2$ dans la réponse à la question 28 par v^2/R^2, $\|\vec{R}_N\| = mg\cos(\theta) - mv^2/R$.
En utilisant l'expression de la vitesse déterminée à la question 29, $\|\vec{R}_N\| = mg\,(3\cos(\theta) - 2\cos(\alpha)) - mv_B^2/R$.
En utilisant l'expression de la vitesse v_B de la question 25, $\|\vec{R}_N\| = 3mg\cos(\theta) - mv_A^2/R$ **[2]**

31. À quelle condition sur v_A (expression littérale puis numérique) n'y aura-t-il pas de décollage de M avant le sommet S ?

De A vers S θ varie de $-\alpha$ a 0 et est donc croissant. Si le décollage a lieu $\|\vec{R}_N\| = 0$, il aura lieu en $\theta = -\alpha$ (minimum du terme variable présent dans $\|\vec{R}_N\|$). **[1]**
La condition pour qu'il n'y ait pas de décollage en A (avant S) s'exprime : $v_A < \sqrt{3Rg\cos(\alpha)}$ **[1]**

32. La condition précédente étant vérifiée, déterminer l'expression θ_D de θ pour laquelle l'aéroglisseur quitte la piste.

L'aéroglisseur quitte la piste pour $\theta = \theta_D$ avec $\|\vec{R}_N\| = 0$ soit $\cos(\theta_D) = \dfrac{v_A^2}{3gR}$ **[1]**

33. Déterminer l'expression de la vitesse pour $\theta = \theta_D$.

En $\theta = \theta_D$, $\|\vec{R}_N\| = 0$ soit $mg\cos(\theta_D) = mv_D^2/R$. D'après l'expression de $\cos(\theta_D)$, $v_D = v_A/\sqrt{3}$ **[1]**

2.4 Atterrissage

On étudie maintenant le mouvement entre le moment où l'aéroglisseur a décollé et celui où il va toucher le sol. On se place dans le repère cartésien OXZ.

34. Écrire les conditions initiales en fonction de R, θ_D et v_D.

$X(t=0) = R\sin(\theta_D)$ et $Z(t=0) = R\cos(\theta_D)$. **[1]**
Avant de quitter le sol, la vitesse est suivant $\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{u}_x - \sin(\theta)\vec{u}_z$, soit $V_X(t=0) = \cos(\theta_D)v_D$ et $V_Z(t=0) = -\sin(\theta_D)v_D$. **[1]**

35. Déterminer l'abscisse de la position où l'aéroglisseur va entrer en collision avec le sol.

Par intégration du PFD projeté sur l'axe vertical, $Z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_Z(t=0)t + Z(t=0)$. **[0,5]**
On cherche la valeur de $t = t_c$ tel que l'aéroglisseur entre en contact avec le sol, soit $Z(t = t_c) = 0$. **[0,5]**
La résolution du polynôme de degré 2 en t_c donne $t_c = \frac{-V_Z(t=0) - \sqrt{V_Z(t=0)^2 + 2Z(t=0)g}}{-g}$ (l'autre solution étant négative et n'ayant pas de réalité physique). **[0,5 + 0,5 pour la simplification]**
On injecte ensuite t_c dans l'expression de $X(t) = V_X(t=0)t + X(t=0)$. **[0,5]**

*** Fin du sujet ***