Devoir Surveillé n°4

Thème : Électronique / Chimie des solutions aqueuses
Durée : 3h / 1h

Consignes :

— L'usage de la calculatrice est interdit.

— Les expressions littérales seront encadrées, et les applications numériques soulignées en couleur. **Une application numérique sans unité sera considérée fausse**.

— Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, indiquez le sur votre copie. Vérifiez tout de même que l'erreur ne provient pas de vous (homogénéité, ordre de grandeur, etc.).

Pour gagner des points supplémentaires :

— La réalisation de schémas soignés accompagnant le propos pourra être valorisé.

— Les commentaires sur les valeurs numériques seront appréciés et éventuellement valorisés.

Ce qui vous fera perdre des points :

— Une réponse non justifiée : ne pas expliciter les hypothèses, définitions, propriétés et théorèmes employés conduira à un malus.

— Un résultat non homogène. Il est possible d'indiquer sur la copie que vous avez remarqué un problème d'homogénéité mais que vous n'avez pas trouvé l'origine de l'erreur.

— Utiliser les valeurs numériques à la place des expressions littérales des grandeurs. Pour ne pas perdre de points, conduisez le calcul avec les grandeurs littérales (e.g. : v, D, Δt, etc.) puis, une fois l'expression littérale obtenue (e.g. : $v = D/\Delta t$) et qu'une application numérique est demandée, remplacer les grandeurs par leurs valeurs numériques ($D = 1$ m, $\Delta t = 2$ s, alors $v = 1/2 = 0,5\,\mathrm{m/s}$)

1 Composants électroniques idéaux

1.1 Modèle du condensateur idéal

Nous étudions les circuits et composants électriques en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω. Nous utiliserons la notation complexe $\underline{x} = x_0 e^{j\omega t+\varphi}$ pour caractériser le signal temporel $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ avec $x_0 > 0$.

1. Rappeler la définition et l'expression de l'impédance $\underline{Z}_C$ d'un condensateur idéal de capicité C.

> Par définition l'impédance est **le rapport de la tension aux bornes du composant et du courant le traversant** que l'on donnera pour le condensateur en **convention récepteur** (un schéma ou une phrase est nécessaire pour indiquer l'orientation des grandeurs courant et tension). [1+1]
>
> L'impédance d'un condensateur vaut $\dfrac{1}{jC\omega}$ en régime forcé sinusoïdal et notation complexe. [1]

2. En supposant qu'un condensateur de ce type soit soumis à une différence de potentiel $e(t) = E\cos(\omega t)$, déterminer l'expression du courant $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ le traversant. On pourra s'aider de la notation complexe comme intermédiaire de calcul pour la tension $\underline{e} = Ee^{j\omega t}$ et le courant $\underline{i} = i_0 e^{j\omega t+\varphi}$. Exprimer i_0 et φ en fonction des paramètres du problème.

> En utilisant la question précédente, $\underline{i} = jC\omega\underline{e} = EC\omega e^{j\omega t+\pi/2}$, [1]
>
> soit un courant réel $\boxed{i(t) = EC\omega\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)}$ avec $i_0 = EC\omega$ et $\varphi = \pi/2$. [1]

3. Nommer le type de déphasage entre le courant et la tension et indiquer si le courant est en avance ou en retard par rapport à la tension.

> Le courant est déphasé d'un quart de tour ($2\pi/4$) par rapport à la tension, les signaux sont **en quadrature**. Le courant est **en avance** par rapport à la tension. [1]

4. En déduire que la puissance moyenne sur une période $2\pi/\omega$ reçue par une capacité idéale est nulle.

> La puissance moyenne sur une période s'écrit $P_{moy} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e(t)i(t)\mathrm{d}t$. La fonction $e(t)i(t) = -E^2 C\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t) \propto \sin(2\omega t)$, est en moyenne nulle sur une période. [1]

5. Montrer que le logarithme (en base 10) du module de l'impédance d'un condensateur idéal vérifie la relation $\log\left(\left|\underline{Z}_C\right|\right) = \alpha - \log(\omega)$ avec α une constante dépendant de C.

> $\left|\underline{Z}_C\right| = 1/C\omega$, ce qui donne la relation attendue avec $\alpha = -\log(C)$. [1]
> Le fait d'estimer le logarithme d'une grandeur non adimensionnée nécessite de fixer les unités choisies pour exprimer $\left|\underline{Z}_C\right|$, C et ω, nous prendrons naturellement les unités du système international. [+1]

6. En déduire une valeur de capacité correspondant à la courbe ci-contre.

> Pour $\left|\underline{Z}_C\right| = 1\ \Omega$, $\omega = 10^6$ rad/s donc $C = 1\ \mu\text{F}$. [1]

7. Rappeler le comportement haute et basse fréquence d'un condensateur idéal.

> $\left|\underline{Z}_C\right| = \dfrac{1}{C\omega} \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0$ ce qui correspond au cas d'une résistance nulle, équivalent un fil parfait. $\dfrac{1}{\left|\underline{Z}_C\right|} = C\omega \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0$ ce qui correspond à une admittance nulle, équivalent à un interrupteur ouvert. [1]

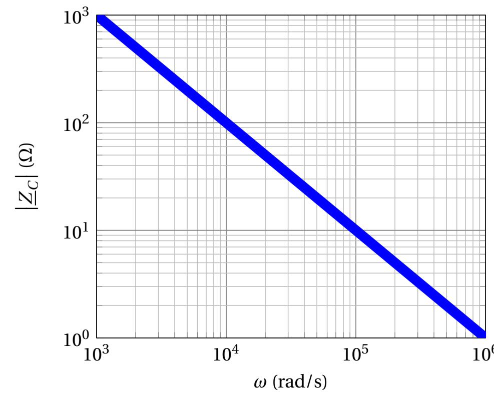


FIGURE 1 – Impédance d'une capacité.

1.2 Modèle d'une bobine idéale

8. Rappeler l'expression de l'impédance $\underline{Z}_L$ d'une bobine idéale d'inductance L.

> $\underline{Z}_L = jL\omega$ en convention récepteur. [1]

9. Tracer l'allure du module de l'impédance d'une bobine de 1 nH dans un diagramme en échelle logarithmique (représenter l'intervalle $\omega \in [10^6; 10^9]$ rad s^{-1}) comme celui utilisé pour la figure 1.

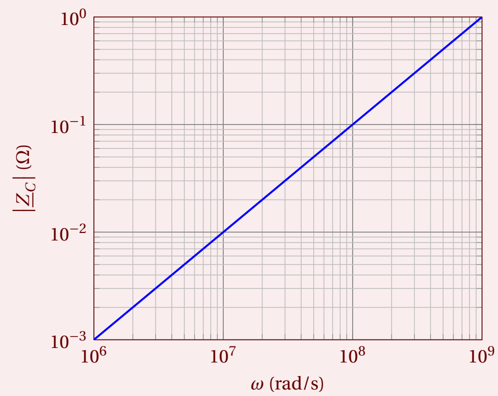


FIGURE 2 – Impédance d'une bobine de 1 nH.

[1]

10. En supposant qu'une bobine de ce type soit soumis à une différence de potentiel $e(t) = E\cos(\omega t)$, déterminer l'expression du courant $i(t) = i_0\cos(\omega t+\varphi)$ la traversant. On pourra s'aider de la notation complexe comme intermédiaire de calcul pour la tension $\underline{e} = Ee^{j\omega t}$ et le courant $\underline{i} = i_0 e^{j\omega t+\varphi}$. Exprimer i_0 et φ en fonction des paramètres du problème.

$\boxed{i(t) = \dfrac{E}{L\omega}\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)}$ avec $i_0 = \dfrac{E}{L\omega}$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ en convention récepteur. [1]

11. Commenter le déphasage et la puissance moyenne reçue sur une période par une bobine.

Le courant et la tension sont en quadrature de phase. Le courant est en retard par rapport à la tension. [1]
La puissance reçue est nulle en moyenne sur une période. [1]

1.3 Impédance d'une résistance idéale

12. En supposant qu'une résistance R idéale soit soumise à une différence de potentiel $e(t) = E\cos(\omega t)$, déterminer l'expression du courant $i(t) = i_0\cos(\omega t+\varphi)$ la traversant. Commenter.

$\boxed{i(t) = \dfrac{E}{R}\cos(\omega t)}$ avec $i_0 = \dfrac{E}{R}$ et $\varphi = 0$ en convention récepteur. [1]
Le courant est en phase avec la tension (la puissance moyenne sur une période sera non nulle). [1]

13. Déterminer l'expression de la puissance moyenne reçue par une résistance R sur une période $2\pi/\omega$ en fonction de R et E.

$P_{moy} = \dfrac{E^2}{R}\dfrac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos^2(\omega t)\mathrm{d}t$ soit $P_{moy} = \dfrac{E^2}{2R}$. [1]

14. Tracer l'allure du module de l'impédance d'une résistance dans un diagramme en échelle logarithmique comme celui utilisé pour la figure 1. Indiquer la valeur de R choisie.

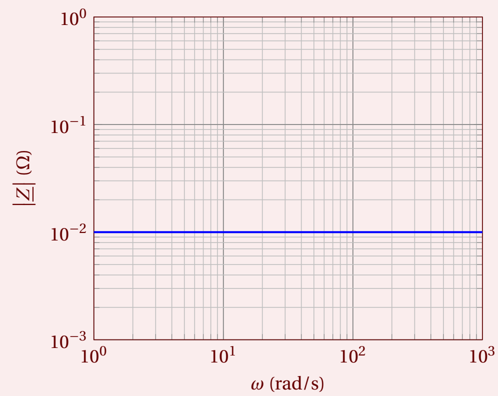


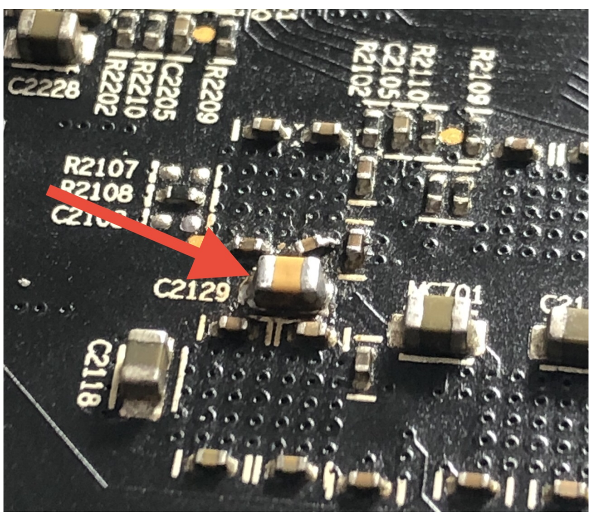
FIGURE 3 – Impédance d'une résistance de 10 mΩ.

[1]

2 Capacité réelle

La partie précédente permet de caractériser l'impédance des composants R, L et C idéaux. Le but de cette partie est de caractériser un composant capacitif réel.

2.1 Étude par intervalle de fréquence



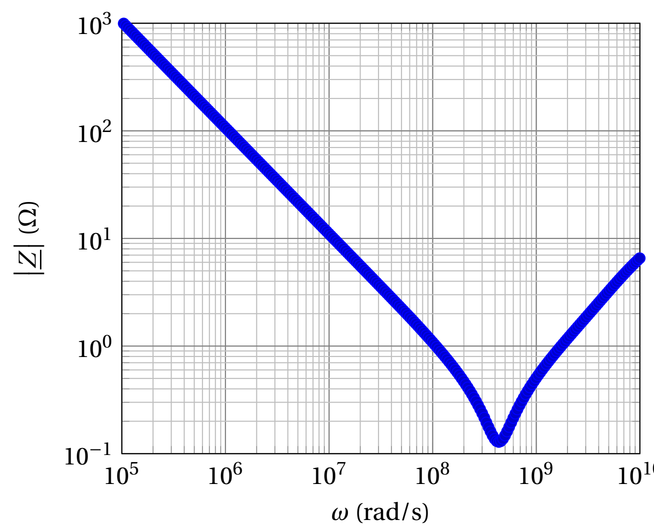
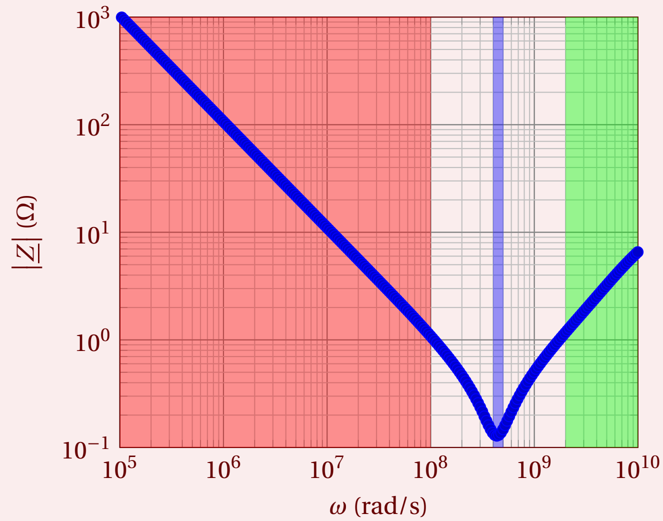


FIGURE 4 – Capacité de type céramique soudée à la surface d'une carte électronique à gauche et module de l'impédance d'une capacité réelle de type céramique à droite (condensateur C0402C103K7PAC de KEMET©).

15. En utilisant les résultats de la partie précédente, identifier les zones (intervalles en pulsations) sur la figure 4 où le module de l'impédance du condensateur réel est identifiable à un condensateur idéal, une bobine idéale et une résistance idéale.

Zone rouge $\omega \in [10^5, 10^8]$ rad/s, comportement de type condensateur ($|\underline{Z}| \propto 1/\omega$).
Zone bleue $\omega \simeq 4 \times 10^8$ rad/s, comportement de type résistance ($|\underline{Z}|$ indépendant de ω).
Zone verte $\omega \in [2.10^9, 10^{10}]$ rad/s, comportement de type bobine ($|\underline{Z}| \propto \omega$). [2]



16. En déduire par lecture graphique la valeur des différents composants idéaux dans chacune de ces zones.

Dans la zone rouge (type condensateur idéal), $|\underline{Z}| = 1$ pour $\omega = 10^8$ rad/s soit $C = 10$ nF.
Dans la zone bleue (type résistance idéale), $|\underline{Z}| \simeq 1 \times 10^{-1}$ Ω.
Dans la zone verte (type bobine idéale), $|\underline{Z}| = 1$ pour $\omega \simeq 2.10^9$ rad/s soit $L = 0{,}5$ nH. [2]

2.2 Modèle RLC série.

Un condensateur réel peut être modélisée comme un circuit RLC série avec des composants idéaux. Cette approche simplifiée permet de rendre compte du comportement non idéal de l'impédance d'un condensateur comme celle apparaissant sur la figure 4.

17. Exprimer l'impédance équivalente d'un circuit RLC série et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme $\underline{Z} = R + jX$, où R et X s'exprime en fonction de R, L, C, j et ω.

$\boxed{\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$. [1]

18. Montrer qu'il existe une valeur de ω pour laquelle X s'annule. A quoi correspond physiquement cette valeur ?

$X = 0$ quand $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. C'est la pulsation propre de l'oscillateur amorti RLC série. [1]

19. Montrer que le comportement asymptotique à haute et basse fréquence d'un circuit RLC série correspond bien à ce qui est observé sur la figure 4.

Pour $\omega \ll \omega_0$, $|\underline{Z}| \simeq \frac{1}{C\omega}$ et $\arg(\underline{Z}) \simeq -\pi/2$: c'est l'impédance d'un condensateur idéal $\underline{Z} \simeq \frac{1}{jC\omega}$. [1]
Pour $\omega \gg \omega_0$, $|\underline{Z}| \simeq jL\omega$ et $\arg(\underline{Z}) \simeq +\pi/2$: c'est l'impédance d'une bobine idéale $\underline{Z} \simeq jL\omega$. [1]

20. À partir des réponses aux questions précédentes, estimer la valeur du facteur de qualité du RLC série permettant de modéliser l'impédance condensateur de la figure 4 (on prendra $1/\sqrt{(20)} \simeq 0{,}22$). Commenter.

En prenant C = 10 nF, L = 0,5 nH et R = 0,1 Ω, le facteur de qualité du circuit $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \simeq 2$. Le condensateur présente une pulsation de résonance car Q > 0,5. [2]

3 Étude d'un filtre RC

3.1 Filtre RC série idéal

Rappelons les résultats attendus d'un filtre RC idéal.

21. Schématiser un filtre RC série où la tension d'entrée est aux bornes des composants résistance (R) et condensateur (capacité C) et la tension de sortie est aux bornes du condensateur.

cf cours [1]

22. Étudier le comportement qualitatif à hautes et basses fréquences du filtre. En déduire le type de filtre.

s=e en BF et s=0 en HF. Filtre passe-bas. [1]

23. En régime sinusoïdal forcé et notations complexes, exprimer la fonction de transfert du filtre.

$\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$ [1]

24. Exprimer le comportement asymptotique du module de la fonction de transfert et de son argument.

Pour $\omega \gg \omega_c = 1/RC$, $\underline{H} \simeq \dfrac{1}{jRC\omega}$ (pente -20dB/décades, argument = $-\pi/2$) et pour $\omega \ll \omega_c$, $\underline{H} \simeq 1$ (asymptote horizontale et argument = 0) [2]

25. Exprimer la pulsation de coupure du filtre en fonction de R et C.

Définition $|\underline{H}|(\omega_c) = |\underline{H}|_{max}/\sqrt{2}$. En utilisant l'expression du module de la fonction de transfert, $\omega_c = 1/RC$. [1]

26. Tracer l'allure du diagramme de Bode du filtre en y repérant les caractéristiques établies dans les questions précédentes.

cf cours [2]

3.2 Filtre RC série réel

Nous allons utiliser la capacité réelle dont l'impédance est représentée figure 4 dans un filtre RC série. Le modèle utilisé pour décrire cette capacité réelle est le RLC série dont les valeurs des composants ont été déterminé dans la partie 2.2. Le schéma électrique du RC série plus proche de la réalité est schématisé ci-contre.

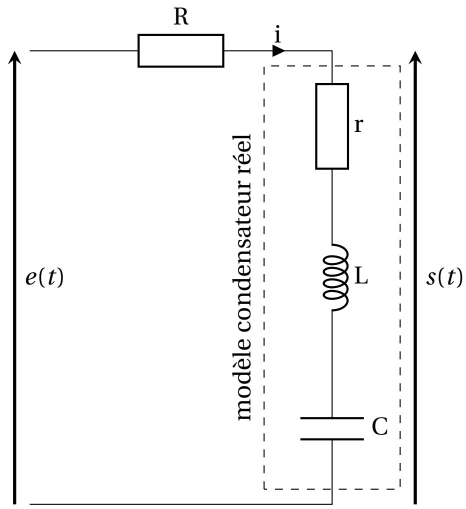


FIGURE 5 – Filtre RC où la capacité réelle est modélisée par un circuit RLC série.

27. Étudier le comportement qualitatif à hautes et basses fréquences du filtre (attention, la sortie $s(t)$ se trouve aux bornes du condensateur réel pas idéal). Proposer un type de filtre compatible avec cette observation.

> $s = e$ en BF et HF. C'est un filtre coupe bande. [1]

28. En régime sinusoïdal forcé et notations complexes, exprimer la fonction de transfert du filtre et la mettre sous la forme :

$$\underline{H} = H_0 \frac{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}{1 + jQ'\left(x - \dfrac{1}{x}\right)},$$

où $x = \omega/\omega_0$, avec H_0, Q, Q' et ω_0 s'exprimant en fonction de r, $R + r$, L et C. La propriété suivante, utile par la suite, peut être démontrée rapidement : $H_0 Q/Q' = 1$.

> $H_0 = \dfrac{r}{R+r}$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ et $Q' = \dfrac{1}{R+r}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \simeq \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. [2]

Dans la suite nous supposerons que $R/r = 10^4$ (soit $R + r \simeq R$) et nous prendrons $Q = 2$.

29. Exprimer le comportement asymptotique du module de la fonction de transfert et de son argument en hautes et basses fréquences. Commenter par rapport au cas d'un condensateur idéal.

> $|\underline{H}| \simeq 1$ en HF et BF. C'est le comportement d'un circuit RC en BF mais pas aux hautes fréquences. [1]

30. Dans le cas où $Q \gg x \gg Q'$ et $x \ll 1$, simplifiez la fonction de transfert et retrouver la caractéristique d'un filtre RC idéal.

> $|\underline{H}| \simeq \dfrac{1}{jRC\omega} = \dfrac{Q'}{jx}$ dans cette zone. C'est le comportement d'un circuit RC en hautes fréquences. [1]

31. Dans le cas où $1/Q \ll x \ll 1/Q'$ et $x \gg 1$, simplifiez la fonction de transfert : a quel filtre ce circuit est-il équivalent dans cette zone de fréquence ?

> $|\underline{H}| \simeq \dfrac{jL\omega}{R} = jQ'x$ dans cette zone. C'est le comportement d'un circuit RL en basses fréquences. [1]

32. Tracer les asymptotes en gain du filtre réel pour les quatre zones $\begin{cases} x \ll 1 \\ x \ll Q' \end{cases}$, $\begin{cases} x \ll 1 \\ Q \gg x \gg Q' \end{cases}$, $\begin{cases} x \gg 1 \\ 1/Q' \gg x \gg 1/Q \end{cases}$, $\begin{cases} x \gg 1 \\ x \gg 1/Q' \end{cases}$.
Commenter.

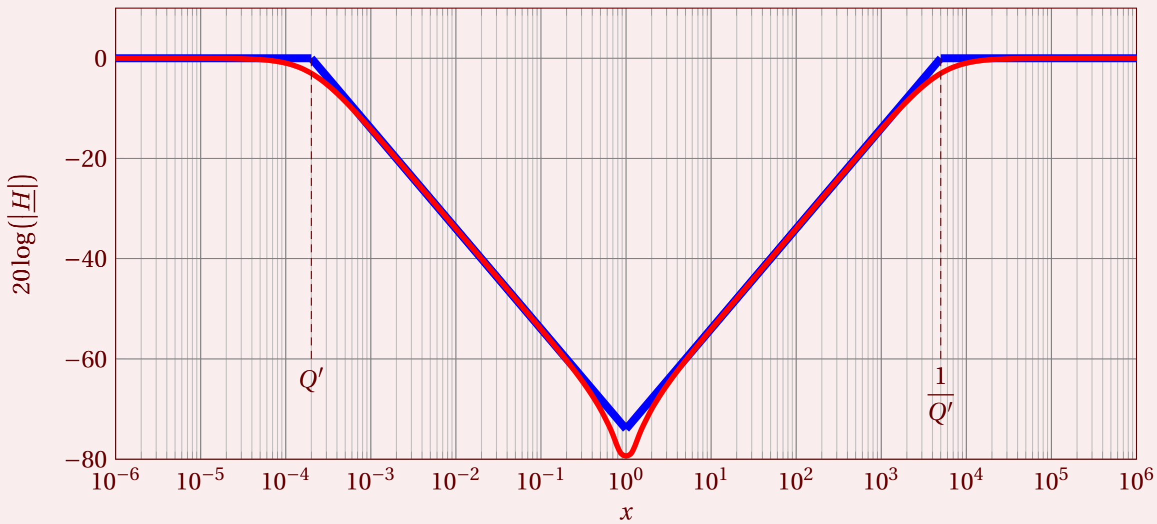


FIGURE 6 – Fonction de transfert d'un filtre RC série réel (impédance condensateur de la figure 4 et résistance idéale de 1 kΩ.

Le diagramme de gain du filtre est très différent de celui du filtre RC série idéal aux hautes fréquences. L'effet inductif de la capacité (essentiellement dues aux connections électriques) même faible ont un impact sur la fonction de transfert du circuit. [2]

*** Fin de la partie Physique ***