Devoir Surveillé n°4

Thème : Électronique / Chimie des solutions aqueuses
Durée : 3h / 1h

Consignes :

- L'usage de la calculatrice est interdit.
- Les expressions littérales seront encadrées, et les applications numériques soulignées en couleur. **Une application numérique sans unité sera considérée fausse**.
- Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, indiquez le sur votre copie. Vérifiez tout de même que l'erreur ne provient pas de vous (homogénéité, ordre de grandeur, etc.).

Pour gagner des points supplémentaires :

- La réalisation de schémas soignés accompagnant le propos pourra être valorisé.
- Les commentaires sur les valeurs numériques seront appréciés et éventuellement valorisés.

Ce qui vous fera perdre des points :

- Une réponse non justifiée : ne pas expliciter les hypothèses, définitions, propriétés et théorèmes employés conduira à un malus.
- Un résultat non homogène. Il est possible d'indiquer sur la copie que vous avez remarqué un problème d'homogénéité mais que vous n'avez pas trouvé l'origine de l'erreur.
- Utiliser les valeurs numériques à la place des expressions littérales des grandeurs. Pour ne pas perdre de points, conduisez le calcul avec les grandeurs littérales (e.g. : v, D, Δt, etc.) puis, une fois l'expression littérale obtenue (e.g. : $v = D/\Delta t$) et qu'une application numérique est demandée, remplacer les grandeurs par leurs valeurs numériques ($D = 1$ m, $\Delta t = 2$ s, alors $v = 1/2 = 0,5$m/s)

1 Composants électroniques idéaux

1.1 Modèle du condensateur idéal

Nous étudions les circuits et composants électriques en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω. Nous utiliserons la notation complexe $\underline{x} = x_0 e^{j\omega t+\varphi}$ pour caractériser le signal temporel $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ avec $x_0 > 0$.

1. Rappeler la définition et l'expression de l'impédance $\underline{Z}_C$ d'un condensateur idéal de capicité C.
2. En supposant qu'un condensateur de ce type soit soumis à une différence de potentiel $e(t) = E\cos(\omega t)$, déterminer l'expression du courant $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ le traversant. On pourra s'aider de la notation complexe comme intermédiaire de calcul pour la tension $\underline{e} = Ee^{j\omega t}$ et le courant $\underline{i} = i_0 e^{j\omega t+\varphi}$. Exprimer i_0 et φ en fonction des paramètres du problème.
3. Nommer le type de déphasage entre le courant et la tension et indiquer si le courant est en avance ou en retard par rapport à la tension.
4. En déduire que la puissance moyenne sur une période $2\pi/\omega$ reçue par une capacité idéale est nulle.
5. Montrer que le logarithme (en base 10) du module de l'impédance d'un condensateur idéal vérifie la relation $\log\left(\left|\underline{Z}_C\right|\right) = \alpha - \log(\omega)$ avec α une constante dépendant de C.
6. En déduire une valeur de capacité correspondant à la courbe ci-contre.
7. Rappeler le comportement haute et basse fréquence d'un condensateur idéal.

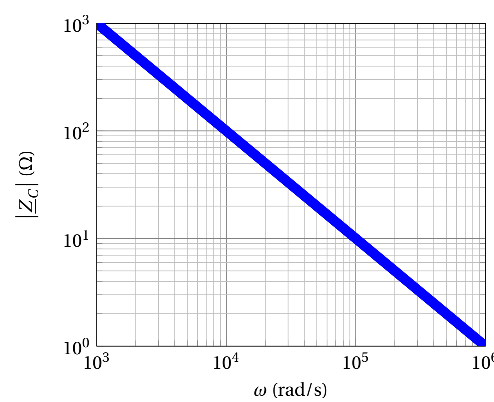

FIGURE 1 – Impédance d'une capacité.

1.2 Modèle d'une bobine idéale

8. Rappeler l'expression de l'impédance $\underline{Z}_L$ d'une bobine idéale d'inductance L.
9. Tracer l'allure du module de l'impédance d'une bobine de 1 nH dans un diagramme en échelle logarithmique (représenter l'intervalle $\omega \in [10^6; 10^9]$ rad s^{-1}) comme celui utilisé pour la figure 1.

10. En supposant qu'une bobine de ce type soit soumis à une différence de potentiel $e(t) = E\cos(\omega t)$, déterminer l'expression du courant $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ la traversant. On pourra s'aider de la notation complexe comme intermédiaire de calcul pour la tension $\underline{e} = Ee^{j\omega t}$ et le courant $\underline{i} = i_0 e^{j\omega t+\varphi}$. Exprimer i_0 et φ en fonction des paramètres du problème.
11. Commenter le déphasage et la puissance moyenne reçue sur une période par une bobine.

1.3 Impédance d'une résistance idéale

12. En supposant qu'une résistance R idéale soit soumise à une différence de potentiel $e(t) = E\cos(\omega t)$, déterminer l'expression du courant $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ la traversant. Commenter.
13. Déterminer l'expression de la puissance moyenne reçue par une résistance R sur une période $2\pi/\omega$ en fonction de R et E.
14. Tracer l'allure du module de l'impédance d'une résistance dans un diagramme en échelle logarithmique comme celui utilisé pour la figure 1. Indiquer la valeur de R choisie.

2 Capacité réelle

La partie précédente permet de caractériser l'impédance des composants R, L et C idéaux. Le but de cette partie est de caractériser un composant capacitif réel.

2.1 Étude par intervalle de fréquence

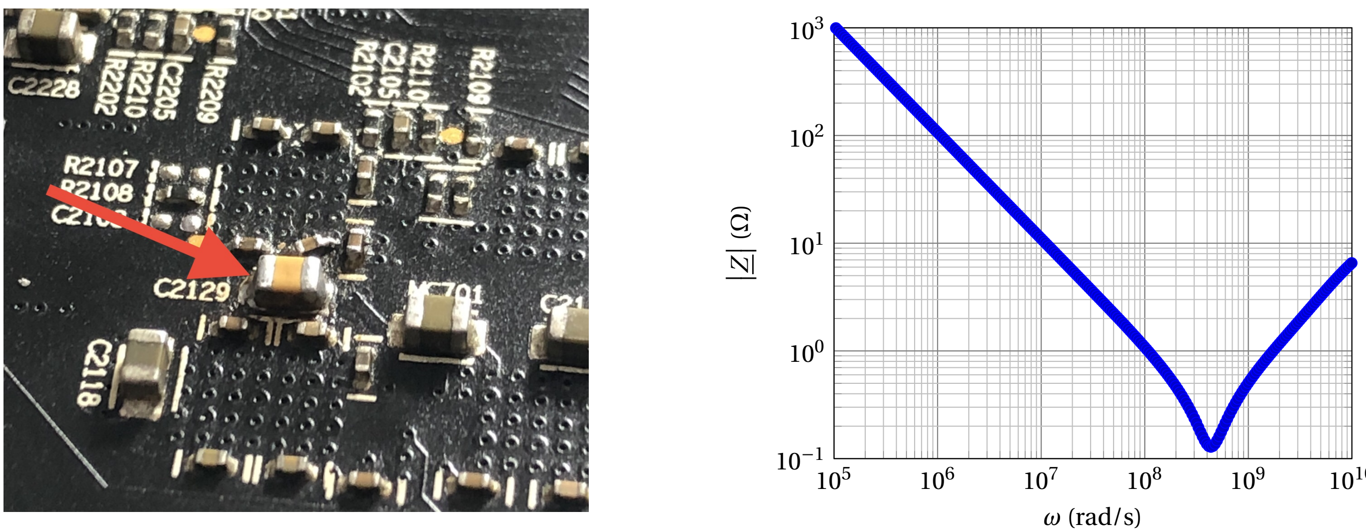

FIGURE 2 – Capacité de type céramique soudée à la surface d'une carte électronique à gauche et module de l'impédance d'une capacité réelle de type céramique à droite (condensateur C0402C103K7PAC de KEMET©).

15. En utilisant les résultats de la partie précédente, identifier les zones (intervalles en pulsations) sur la figure 2 où le module de l'impédance du condensateur réel est identifiable à un condensateur idéal, une bobine idéale et une résistance idéale.
16. En déduire par lecture graphique la valeur des différents composants idéaux dans chacune de ces zones.

2.2 Modèle RLC série.

Un condensateur réel peut être modélisée comme un circuit RLC série avec des composants idéaux. Cette approche simplifiée permet de rendre compte du comportement non idéal de l'impédance d'un condensateur comme celle apparaissant sur la figure 2.

17. Exprimer l'impédance équivalente d'un circuit RLC série et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme $\underline{Z} = R + jX$, où R et X s'exprime en fonction de R, L, C, j et ω.
18. Montrer qu'il existe une valeur de ω pour laquelle X s'annule. A quoi correspond physiquement cette valeur ?
19. Montrer que le comportement asymptotique à haute et basse fréquence d'un circuit RLC série correspond bien à ce qui est observé sur la figure 2.
20. À partir des réponses aux questions précédentes, estimer la valeur du facteur de qualité du RLC série permettant de modéliser l'impédance condensateur de la figure 2 (on prendra $1/\sqrt(20) \simeq 0{,}22$). Commenter.

3 Étude d'un filtre RC

3.1 Filtre RC série idéal

Rappelons les résultats attendus d'un filtre RC idéal.

21. Schématiser un filtre RC série où la tension d'entrée est aux bornes des composants résistance (R) et condensateur (capacité C) et la tension de sortie est aux bornes du condensateur.
22. Étudier le comportement qualitatif à hautes et basses fréquences du filtre. En déduire le type de filtre.
23. En régime sinusoïdal forcé et notations complexes, exprimer la fonction de transfert du filtre.
24. Exprimer le comportement asymptotique du module de la fonction de transfert et de son argument.
25. Exprimer la pulsation de coupure du filtre en fonction de R et C.
26. Tracer l'allure du diagramme de Bode du filtre en y repérant les caractéristiques établies dans les questions précédentes.

3.2 Filtre RC série réel

Nous allons utiliser la capacité réelle dont l'impédance est représentée figure 2 dans un filtre RC série. Le modèle utilisé pour décrire cette capacité réelle est le RLC série dont les valeurs des composants ont été déterminé dans la partie 2.2. Le schéma électrique du RC série plus proche de la réalité est schématisé ci-contre.

27. Étudier le comportement qualitatif à hautes et basses fréquences du filtre (attention, la sortie $s(t)$ se trouve aux bornes du condensateur réel pas idéal). Proposer un type de filtre compatible avec cette observation.
28. En régime sinusoïdal forcé et notations complexes, exprimer la fonction de transfert du filtre et la mettre sous la forme :

$$\underline{H} = H_0 \frac{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}{1 + jQ'\left(x - \dfrac{1}{x}\right)},$$

où $x = \omega/\omega_0$, avec H_0, Q, Q' et ω_0 s'exprimant en fonction de r, $R+r$, L et C. La propriété suivante, utile par la suite, peut être démontrée rapidement : $H_0 Q/Q' = 1$.

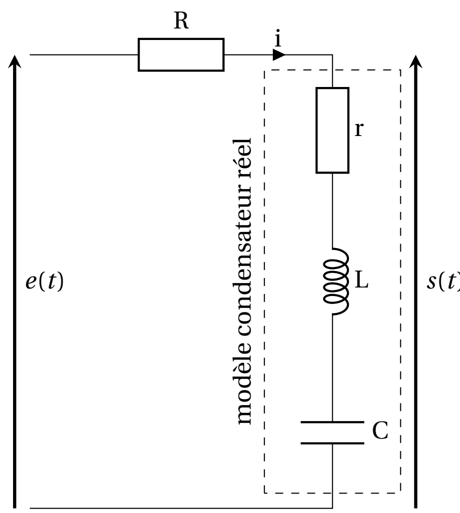

FIGURE 3 – Filtre RC où la capacité réelle est modélisée par un circuit RLC série.

Dans la suite nous supposerons que $R/r = 10^4$ (soit $R + r \simeq R$) et nous prendrons $Q = 2$.

29. Exprimer le comportement asymptotique du module de la fonction de transfert et de son argument en hautes et basses fréquences. Commenter par rapport au cas d'un condensateur idéal.
30. Dans le cas où $Q \gg x \gg Q'$ et $x \ll 1$, simplifiez la fonction de transfert et retrouver la caractéristique d'un filtre RC idéal.
31. Dans le cas où $1/Q \ll x \ll 1/Q'$ et $x \gg 1$, simplifiez la fonction de transfert : a quel filtre ce circuit est-il équivalent dans cette zone de fréquence ?
32. Tracer les asymptotes en gain du filtre réel pour les quatre zones $\begin{cases} x \ll 1 \\ x \ll Q' \end{cases}$, $\begin{cases} x \ll 1 \\ Q \gg x \gg Q' \end{cases}$, $\begin{cases} x \gg 1 \\ 1/Q' \gg x \gg 1/Q \end{cases}$, $\begin{cases} x \gg 1 \\ x \gg 1/Q' \end{cases}$.

    Commenter.

*** Fin de la partie Physique ***