Devoir Surveillé de Physique n°1

Thème : Optique - Durée : 4h

Consignes :

- ⋆ Les calculatrices sont interdites.
- ⋆ **Les expressions littérales sont à encadrer et les applications numériques à souligner**.
- ⋆ **Une application numérique sans unité sera considérée fausse**.
- ⋆ Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, indiquez le sur votre copie. Vérifiez tout de même que l'erreur ne provient pas de vous (homogénéité, ordre de grandeur, etc.).
- ⋆ Les parties et sous-parties peuvent être traitées de manière indépendante et dans l'ordre que vous voulez. Cependant, les questions devront être restituées dans l'ordre sur votre copie : il faudra donc savoir gérer les espaces si vous sautez des questions.
- ⋆ Les simplifications ou remaniements d'équations n'interressent pas votre correcteur, pensez à faire ces calculs sur un brouillon et à ne mettre que l'essentiel sur votre copie (invocation d'un théorème, d'une propriété, d'une définition, d'une hypothèse : les éléments physiques concrets en fin de compte).

Pour gagner des points supplémentaires :

- + La réalisation de schémas soignés accompagnant le propos pourra être valorisé.
- + Les commentaires sur les valeurs numériques seront appréciés et éventuellement valorisés.

Ce qui vous fera perdre des points :

- - Une réponse non justifiée : ne pas expliciter les hypothèses, définitions, propriétés et théorèmes employés conduira à un malus.
- - Un résultat non homogène conduira à un malus. Pour annuler ce malus, remarquez ce type erreur en en faisant mention sur votre copie ou corrigez-vous.
- - Manipuler des équations en remplaçant les symboles des grandeurs par des valeurs numériques conduira à un malus. Ce n'est uniquement au moment de l'application numérique que vous devez utiliser les valeurs numériques.

1 Lois de Snell-Descartes

1. Rappeler les lois de Snell-Descartes en vous aidant d'un schéma. (3 min)

> 2 lois [/0,5], plan d'incidence [/0,5], formule réflexion/réfraction [/0,5], indices et angles schématisés (orientés ou non) en correspondance avec les lois énoncées [/0,5]

1.1 Fibre optique pliée (- de 30 min)

Une fibre optique est constituée d'une âme en verre d'indice $n_1 = 1,66$ et de diamètre $d = 0,05$ mm entourée d'une gaine en verre d'indice $n_2 = 1,52$. On courbe la fibre éclairée sous incidence normale et on note R ce rayon de courbure (cf figure 1).

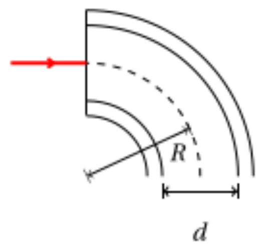


FIGURE 1 – Fibre optique courbée. Ce schéma ne peut pas être utilisé pour les calculs.

2. Reporter le schéma de la fibre sur votre feuille. Expliquer comment le rayon lumineux traverse le dioptre d'entrée de la fibre. Noter A le point d'incidence du rayon sur ce dioptre.

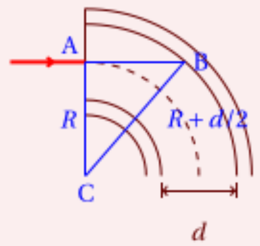
> D'après l'énoncé, le rayon incident en A est normal au dioptre.L'angle d'incidence vaut donc 0° et l'angle que fait le rayon réfracté avec la normale vaut, d'après la loi sur la réfraction (Q1), 0°. **Le rayon va en ligne droite, il n'est pas dévié**. [/1]

3. Indiquer qualitativement comment le rayon lumineux interragit avec le deuxième dioptre en fonction de la valeur du rayon de courbure. Noter B le point d'incidence du rayon sur ce dioptre.

> La valeur de R joue sur l'angle d'incidence en B. Plus R est petit, plus l'angle d'incidence en B est faible. En B, le rayon incident sera réflechi uniquement (comportement normal d'une fibre) pour R suffisament grand et sera potentiellement réfracté en dessous d'une certaine valeur de R. Reste à déterminer laquelle. [/1]

4. Donner l'expression du rayon de courbure minimal en fonction de n_1, n_2 et d pour lequel toute la lumière incidente reste contenue dans le coeur de la fibre.

L'angle $\widehat{ABC}$ est par définition l'angle d'incidence du rayon en B, BC est normal au dioptre (géométrie), ABC est rectangle en A (question 2), le sinus de cet angle vaut la longueur AC divisée par BC (trigonométrie). D'après la loi de Snell-Descartes sur la réfraction, le sinus de cet angle est aussi égal à n_2/n_1 lorsque le rayon réfracté est à "la limite d'exister". Ces deux égalitées conduisent à $\frac{R}{R+d/2} = \frac{n_2}{n_1}$. En isolant R : $\boxed{R = \frac{d}{2}\frac{n_2}{n_1 - n_2}}$. [/1]



5. Faire l'application numérique en donnant deux chiffres significatifs.

R = 0, 27 mm [/1]

1.2 Flotteur (- de 20 min)

Un disque en liège de rayon r flotte sur l'eau d'indice n; il soutient une tige placée perpendiculairement en son centre (cf figure 2).

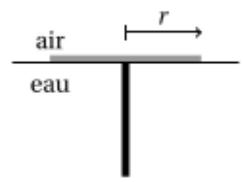


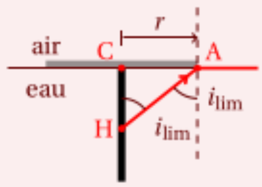
FIGURE 2 – Disque soutenant une tige. Ce schéma ne peut pas être utilisé pour calculer des angles.

6. Donner les valeurs usuelles de l'indice de l'air n_a et de l'eau n.

Environ 1 pour l'air et 1,33 pour l'eau dans les conditions usuelles de température et de pression. [/1]

7. Quelle est la longueur de la partie de la tige non visible pour un observateur dans l'air? Montrer que son expression peut se mettre sous la forme approchée $r\sqrt{n^2-1}$. Citer les phénomènes mis en jeu.

En A tracer un rayon réfracté dans l'air à la limite d'exister et un rayon incident provenant d'un point quelconque de la tige (indiquez que le schéma ne respecte pas forcément la valeur réelle des angles, c'est un schéma utile pour les notations uniquement). L'angle d'incidence formé correspond à l'angle limite i_{lim} de la réfraction. D'après la loi sur la réfraction en A, le sinus de cet angle vaut n_a/n [/1].



Cet angle est le même que $\widehat{CHA}$ (tige perpendiculaire à la surface de l'eau (énoncé) => parallèle à la normale au dioptre en A), la tangeante de l'angle vaut donc r/CH [/1].

Trigonométrie : $\cos^2(i_{\text{lim}}) + \sin^2(i_{\text{lim}}) = \sin^2(i_{\text{lim}})\left(\frac{1}{\tan^2(i_{\text{lim}})} + 1\right) = 1$. On remplace $1/\tan^2(i_{\text{lim}})$ par CH^2/r^2 et $\sin^2(i_{\text{lim}})$ par n_a^2/n^2 puis on isole CH qui est la longueur recherchée : $CH = r\sqrt{\frac{n^2 - n_a^2}{n_a^2}}$. Pour $n_a \simeq 1$, on obtient la formule attendue. [/1]

2 Systèmes optiques

2.1 Effet d'une loupe (- de 40 min)

Un numismate cherche à examiner une pièce de 2 euros de diamètre $d = 2{,}5$ cm. Il place une face de cette pièce de façon perpendiculaire et centrée par rapport à l'axe optique d'une lentille mince convergente de distance focale $f' = 100$ mm et située entre le point focal objet et le centre optique de la lentille.

8. Schématiser la situation, à l'échelle, en symbolisant la pièce par un objet dont les bords sont représentés par des points objets notés A et B, et en utilisant le schéma usuel d'une lentille mince dans les conditions de Gauss. Construire l'image de la pièce dont les bords seront symbolisés par des points images A' et B'. Conseils : ne pas placer l'objet trop proche du point focal objet.

[/2]

9. L'image est-elle réelle ou virtuelle, est-elle plus grande, plus petite ou de même taille que l'objet?

L'image est virtuelle car elle est situé avant la lentille, et elle est plus grande que l'objet.

Le numismate place son oeil à $L = 25$ cm de la pièce et la lentille à $\ell = 5$ cm de la pièce.

10. À quoi correspond cette distance pour un oeil normal? Comment la nomme-t'on?

C'est son punctum proximum, la distance minimale pour laquelle un oeil normal (emmétrope) voit net. [/1]

11. Exprimer le grandissement transversal (cf formulaire) de la lentille en fonction de ℓ et f'.

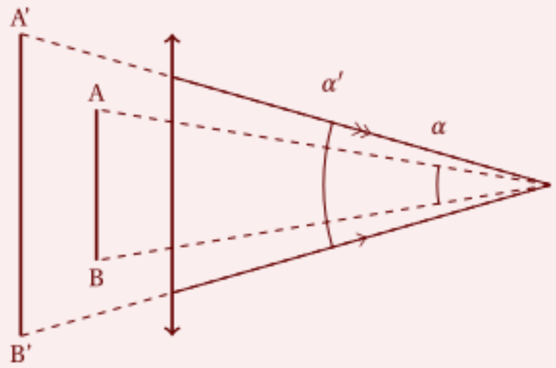
Utiliser la formule du grandissement et la formule de conjugaison. On montre que le grandissement transversal vaut $\gamma_t = \dfrac{f'}{f'-\ell}$. *Vérifiez que le grandissement n'est pas inférieur à 1 en valeur absolue, ce serait contraire à ce que vous observez avec votre schéma!* 2

12. Calculer le grandissement transversal dans la configuration de l'énoncé. Quelle interprétation physique donner à ce résultat?

$\gamma_t = 2$. L'image est deux fois plus grande que l'objet. *Vérifiez ce résultat sur votre schéma qui est à l'échelle!* [/1]

13. Exprimer le rapport des diamètres angulaires de la pièce (le grossissement) vu par le numismate en fonction de ℓ, L et f'. On pourra faire l'approximation des petits angles : $\tan(\alpha) \simeq \sin(\alpha) \simeq \alpha$ pour $\alpha \ll 1$

Faire un dessin. AB a un diamètre angulaire α sans la lentille, et α' avec la lentille.



Le grossissement s'exprime :

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1+\frac{L}{\ell}}{1+\frac{f'-L}{f'}\frac{L}{\ell}}$$

14. Calculer le rapport des diamètres angulaires (le grossissement) vu par le numismate. Comparer au résultat précédent et commenter. Faire l'approximation des petits angles et prendre 1,7 x 35 ≃ 60.

$\underline{\dfrac{\alpha'}{\alpha} = 1{,}7 \text{ cm}}$

2.2 Etude d'un appareil photographique numérique (environ 2h)

Un appareil photographique numérique (noté APN par la suite) peut être modélisé comme une assemblage successif des éléments suivants : un diaphragme de diamètre variable noté D, une lentille mince convergente de distance focale image f' fixe et d'un capteur CCD (*Charge-Coupled Device*) dont les pixels seront supposés carré et de côté noté r. La distance entre la lentille et le capteur sera notée d' et peut être variabe : elle est reliée à la distance de mise au point notée d entre le centre de la lentille et l'objet à photographier.
Nous allons nous intéresser à la profondeur de champ de l'APN. Les figures 3 et 4 permettent de comprendre l'importance de la taille du diaphragme, de la distance de mise au point, de la *focale* de l'APN et de la taille d'un pixel. Le but de cette partie sera d'arriver à démontrer la formule de la profondeur de champ et de l'utiliser (cf figure 4 pour les notations) :

$$\overline{A_1A_2} = \frac{2rNd(d-f')}{f'^2 - \dfrac{(d-f')^2 r^2 N^2}{f'^2}} \tag{1}$$

2.2.1 Distance hyperfocale

On appelle distance hyperfocale la distance entre la lentille d'un APN et le premier plan vu net lorsque ce dernier est réglé pour voir une image nette à l'infini. On note usuellement cette distance H.

FIGURE 3 – Représentation d'un appareil photographique et de l'influence du diaphragme sur la profondeur de champs. A gauche, l'image de l'objet A par la lentille est situé sur la surface du capteur tandis que l'image de B est située avant le capteur : l'image de B forme une tache sur le capteur plus gros qu'un pixel du CCD : 3 pixels sont éclairés. L'image de B sera donc floue alors que celle de A sera nette. A droite, on rajoute un diaphragme : les images de A et B sont placées au même endroit mais la tache formée par B est moins grande que la taille d'un pixel. Pour le CCD, un seul pixel sera éclairé : les images de A et de B seront nettes.

15. Dans quel plan se forme l'image par une lentille mince convergente d'un objet réel situé à l'infini ? $\boxed{1}$

On supposera dans cette partie que le capteur CCD est placé sur ce plan. L'image à travers la lentille de l'APN d'un objet réel situé à l'infini est donc vu nette, on appellera ce réglage "APN réglé à l'infini". Sauf mention contraire, nous travaillerons par la suite avec ce réglage (qui **n'est pas** celui de la figure 4).

16. Schématiser (dessin sur une demi-page) un APN lorsque celui-ci est réglé à l'infini : faire passer par les bords du diaphragmes deux rayons parallèles à l'axe optique (symbolisant un point objet réel à l'infini sur l'axe optique) et construire le point image de cet objet. On n'oubliera pas de faire apparaître les longueurs D, f', r, et les points F', O et F **en les définissant**. $\boxed{2}$
17. Avez-vous tracé le point image à partir d'une propriété de la lentille ou est-ce que la position de ce point est donné par une définition inhérente à la lentille ? $\boxed{1}$

On place maintenant un point objet réel noté A_1 sur l'axe optique à une distance finie du centre optique. On prendra 2,5 fois la distance focale image entre A_1 et O.

18. Tracez l'image A_1' de A_1 par la lentille **en utilisant uniquement des rayons lumineux provenant de** A_1 **et passant par les bords du diaphragme**. On utilisera pour cela des rayons de construction passant par le centre optique. On appellera M (respectivement N) l'intersection entre le plan où se trouve le capteur CCD et le rayon provenant du bord haut (respectivement du bord bas) du diaphragme. $\boxed{2}$
19. Par rapport à la lentille, dans quel plan se trouve les points M et N ? Comment appelle-t'on ces points en optique ? $\boxed{1}$
20. Quelle inégalité doit vérifier la distance MN pour que l'image de A_1 soit vue nette par le capteur CCD ? $\boxed{1}$

On suppose que la tache formée par l'image de A_1 sur le capteur a la taille d'un pixel.

21. Expliquer la raison pour laquelle la longueur algébrique $\overline{A_1O}$ correspond à la distance hyperfocale ($H = \overline{A_1O}$). $\boxed{1}$
22. Exprimer la distance hyperfocale H en fonction du diamètre du diaphragme D, de la distance focale image f' et de la taille d'un pixel r.

> Thalès ou trigonométrie : $H = \dfrac{Df'}{r}$ [/1]

23. Exprimer la distance hyperfocale en fonction du nombre d'ouverture N de l'APN (cf formulaire), de la taille d'un pixel, et de la distance focale image. $\boxed{1}$
24. De quel facteur est modifié la distance hyperfocale si le nombre d'ouverture est doublé ? $\boxed{1}$
25. Décrire les ressemblances et les différences entre l'œil humain et l'APN. Quel autre nom donne-t'on au "réglage à l'infini" pour un œil ? $\boxed{2}$

La distance hyperfocale est une grandeur caractéristique de la profondeur de champ d'un APN : pour un objectif et un capteur CCD donné, cette distance ne peut varier qu'en modifiant le diamètre du diaphragme. Cette distance interviendra plus loin dans l'énoncé.

2.2.2 Exposition du capteur : temps de pose et nombre d'ouverture

La quantité de lumière arrivant sur le capteur CCD est proportionnel à la surface S délimitée par le diaphragme (qui à une ouverture en forme de disque). Diminuer par 2 cette surface revient à augmenter par 2 le temps d'exposition du capteur CCD pour pouvoir rester dans les mêmes conditions d'exposition. La surface n'est pas un paramètre qui est donné par un APN contrairement au nombre d'ouverture. Le but est de déterminer l'influence du nombre d'ouverture sur le temps d'exposition.

26. Exprimer le nombre d'ouverture N d'un APN en fonction de la surface S délimitée par le diaphragme et de f'. $\boxed{1}$
27. En multipliant le nombre d'ouverture par $\sqrt{2}$, de quel facteur est multiplié le temps d'exposition ? *Aide pour la compréhension : la quantité de lumière reçue par le capteur est donc reliée à N d'après l'énoncé et la relation précédente.* $\boxed{1}$
28. En multipliant le nombre d'ouverture par 2, de combien est modifiée la distance hyperfocale ? Que doit-on faire pour rester dans les mêmes conditions d'exposition ? $\boxed{2}$

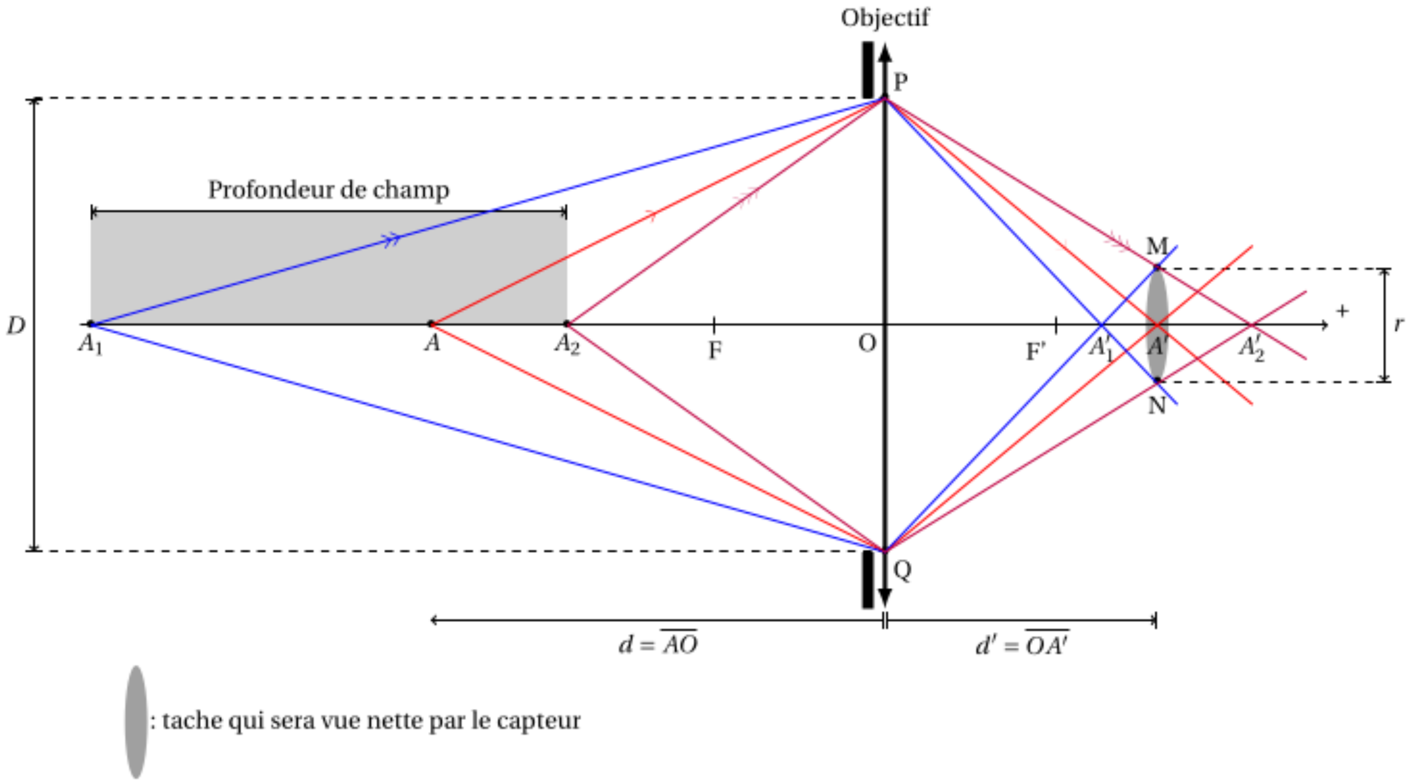


FIGURE 4 – Représentation de la profondeur de champ en fonction d'une distance de mise au point d, de la taille d'un pixel r, du diamètre du diaphragme D. Pour voir net un objet situé entre les plans passant par A_1 et A_2 et perpendiculaires à l'axe optique il suffit que le diamètre de la tâche dans le plan passant par A' et perpendiculaire à l'axe optique soit de la même taille qu'un pixel du capteur CCD.

2.2.3 Taille d'un pixel

Les dimensions des capteurs CCD varient en fonction des modèles d'appareils photographiques. Le format de référence issu de la photographie argentique est le "24 × 36", correspondant à la largeur (24 mm) et à la longueur (36 mm) du capteur qui a une forme rectangulaire.

29. Pour un APN dont le capteur a un format de "24 × 36" et composé de 10,7 millions de pixels de surface carré, calculer la longueur du côté r d'un pixel *(prenez garde aux chiffres significatifs). On donne* $8{,}9859^2 \simeq 24 \times 36 / 10{,}7$. 1

Certains APN ont des capteurs plus petits, $4{,}29 \times 5{,}76$ par exemple, pour le même nombre de pixels.

30. Calculer la longueur du côté d'un pixel pour un format $4{,}29 \times 5{,}76$ avec 10 millions de pixels. *On donne* $1{,}57195^2 = 4{,}29 \times 5{,}76/10$ 1
31. Comparer l'impact des deux formats sur la distance hyperfocale. En utilisant le même objectif, la même ouverture, et un "réglage à l'infini" pour ces deux formats, lequel de ces deux APN aura la profondeur de champ la plus grande ?

> H augmente quand r diminue. L'APN réglé à l'infini voit un sujet net s'il est situé au-delà de la distance hyperfocale. Une réduction de la taille des pixels augmente la distance hyperfocale et réduit la zone vue nette par l'appareil. C'est donc l'appareil de format "24 × 36" qui a la plus grande profondeur de champ à réglage égal. 1

32. Sachant que la quantité de lumière collectée par un pixel est proportionnelle à sa surface, quel serait le rapport des temps de pose entre un format 24×36 et $4{,}29 \times 5{,}76$? On supposera que les conditions d'exposition et l'objectif utilisé (réglage du diaphragme et focale de la lentille) sont identiques. *On prendra :* $4{,}29 \times 5{,}76 \times 10{,}7 \times 32{,}7 \simeq 24 \times 36 \times 10$.

> Le nombre de pixels étant quasiment identique, le rapport des surface des capteurs nous donne le rapport de surface des pixels. Avec l'aide au calcul, le rapport de la surface des pixels est donné et vaut environ 32. Il y a donc un temps de pose 32 fois plus important avec un format réduit qu'avec un plein format à réglage identique. 1

2.2.4 Profondeur de champ

On raisonne dans cette section à partir de la figure 4. La reproduction entière de cette figure sur votre copie ***n'est pas demandée****. La reproduction partielle est fortement recommandée.*

33. Utiliser des rayons passant par F pour construire les points objet correspondant aux images M et N à travers la lentille. On notera K le point objet conjugué à N et L le point objet conjugué à M. $\boxed{2}$
34. Montrer à partir de ces rayons et d'un théorème de Thalès que $\frac{KL}{r} = -\frac{\overline{AF}}{\overline{OF}}$. $\boxed{1}$
35. Exprimer alors la longueur KL en fonction de d, f' et r. $\boxed{1}$
36. Appliquer le théorème de Thalès dans les couples de triangles (KLA_2 et A_2PQ), (KLA_1 et A_1PQ). Montrer que $\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1O}} = \frac{\overline{A_2A}}{\overline{A_2O}} = \frac{KL}{D}$ $\boxed{\text{pb}}$ $\boxed{1}$
37. En utilisant la formule mathématique du formulaire, montrer à partir des relations précédente que : $\boxed{1}$

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1O}+\overline{A_2O}} = \frac{r(d-f')}{f'D} \qquad \frac{\overline{A_1A}+\overline{A_2A}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{r(d-f')}{f'D} \tag{2}$$

38. En remarquant que $\overline{A_1A}+\overline{A_2A} = \overline{A_1O}+\overline{A_2O}-2d$ et en utilisant les relations précédentes, montrer que l'on peut aboutir à l'équation (1).
39. Faisons tendre la distance d dans l'équation (1) vers la distance hyperfocale H. A quoi correspond physiquement cette limite? Commentez.

Pour des grands nombres d'ouverture et une distance de mise au point vérifiant $f' \ll d \ll H$, il est possible d'approximer l'équation (1) sous la forme :

$$\overline{A_1A_2} \simeq \frac{2f'^2}{rN}$$

40. Remarquer dans ces conditions le lien entre la profondeur de champs et la distance hyperfocale puis commenter.

Formulaire

— Pour un objet A transformé en une image A' par une lentille mince de distance focale image f' et de centre optique O, la formule de conjugaison de Descartes s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

— Le grandissement transversal noté γ_t d'un système optique correspond au rapport entre la longueur algébrique de l'image et celle de l'objet. Il vérifie la propriété suivante :

$$\gamma_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

— Le nombre d'ouverture noté N d'un APN est défini par la relation $N = \frac{f'}{D}$ avec f' la distance focale image de la lentille et D le diamètre du diaphragme accolé à la lentille.

— Propriété mathématique : si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = e$$

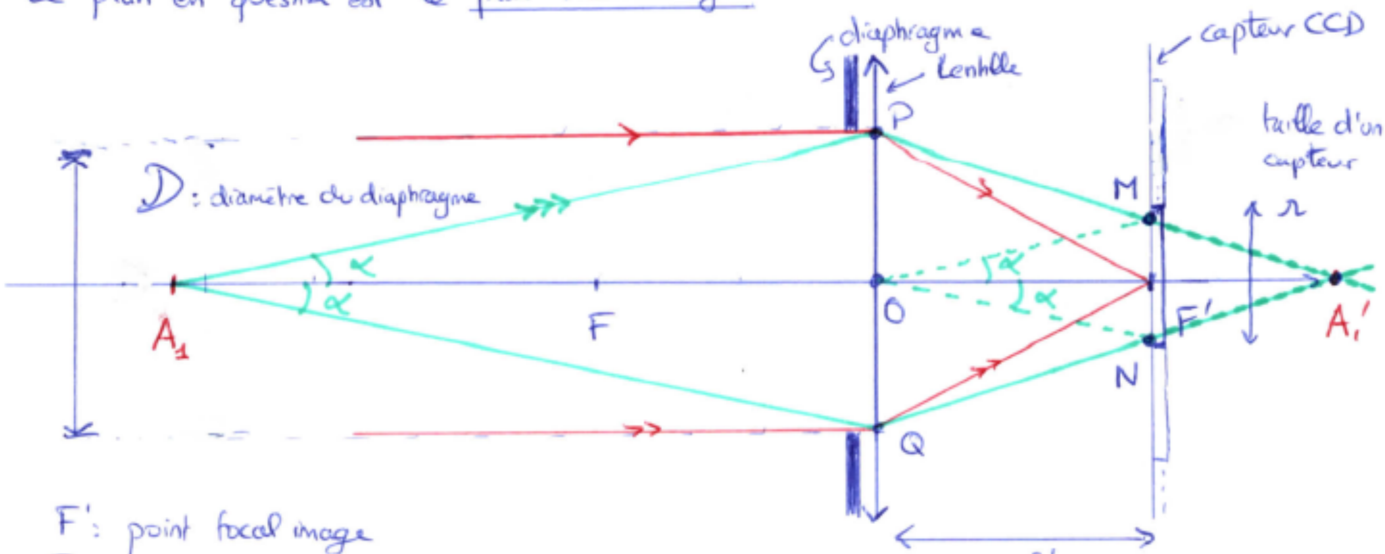
alors pour $b \neq \pm d$ on a

$$\frac{a+c}{b+d} = e \quad \text{et} \quad \frac{a-c}{b-d} = e$$

* * * Fin * * *

$A_\infty \xrightarrow[\text{convergente}]{\text{Lentille}} F'$ pour A_∞ : objet réel à l'∞ sur l'axe optique
F' : point focal image de la lentille

Le plan en question est le plan focal image



F' : point focal image
F : " " objet
O : centre optique

- Des rayons // à l'axe optique convergent en un point appelé point focal image noté F'. C'est la définition du point focal image.
- Les rayons provenant d'un objet situé à l'∞ sur l'axe optique convergent donc en F' : l'image de cet objet est donc confondu avec F'.

Les rayons - - - - sont parallèles aux rayons ——, ce sont des rayons de constructions : l'intersection avec le plan focal image forme un foyer image secondaire (les points M et N)

MN doit être plus petit que la taille d'un pixel pour que la tache image correspondant à A_1' soit vu comme un point par le capteur.

$$\boxed{MN \leq r}$$

- On suppose $MN = r$ par la suite (énoncé)

La distance hyperfocale $H = \overline{A_1O}$. L'angle $\widehat{PA_1Q}$ étant égal à $\widehat{MON}$ et (PQ) étant parallèle à (MN) par construction, nous pouvons utiliser Thalès dans les triangles PA_1Q et MON

soit $\dfrac{PQ}{A_1O} = \dfrac{MN}{OF'} \iff \boxed{H = \dfrac{Df'}{r}}$

(Autre méthode : $\tan(\alpha) = \dfrac{D/2}{H} = \dfrac{r/2}{f'}$ qui conduit au même résultat)

Sachant que $N = \dfrac{f'}{D}$, $\boxed{H = \dfrac{f'^2}{Nr}}$

Si N est doublé, H est divisé par 2

Ressemblances : combinaison diaphragme + lentille + capteur

Différences : Oeil : la distance lentille – capteur est fixe $\neq$ APN : la distance focale est fixe

Réglage à l'infini : Oeil sans accomodation

- S est proportionnel à D^2 donc à $1/N^2$ $\rightarrow$ $\boxed{S = \frac{C}{N^2}}$

Le temps d'exposition est inversement proportionnel à S donc est proportionnel à N^2.
Si N est augmenté d'un facteur $\sqrt{2}$, le temps d'exposition doit être multiplié par 2 pour obtenir des conditions d'exposition similaires.

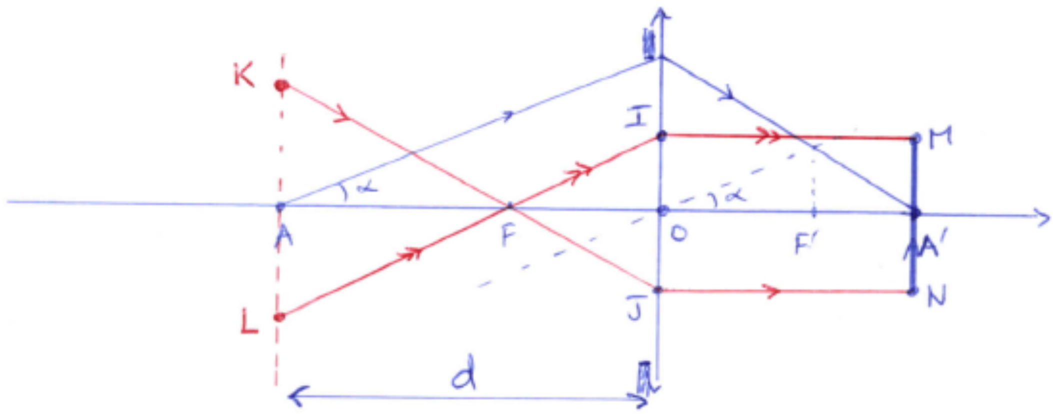
, si N est multiplié par 2, H est divisé par 2.
Donc pour augmenter la profondeur de champ en divisant par 2 la distance hyperfocale, il faut multiplier par 4 le temps d'exposition

$r^2 = \frac{24 \times 36 . 10^{-6}}{10,7 . 10^6}$ (les pixels étant carrés) soit $r \simeq 9,3 . 10^{-6}$ m

$r = 10^{-6}$ m , en gros un facteur 10 entre la taille des pixels des deux capteurs.
La distance hyperfocale sera plus grande dans le cas d'un APN $4,29 \times 5,76$ que pour un APN 24×32.

- Plus la distance hyperfocale est grande, plus les premiers plan vus par le CCD seront flous. L'APN $4,29 \times 5,76$ est un bon candidat pour le phénomène de bokeh.
- La surface d'un pixel est r^2. Il y a donc un facteur 100 entre les surfaces de pixel des deux capteurs donc un temps de pose a priori 100 fois plus grand avec le $4,29 \times 5,76$ qu'avec le 24×36.

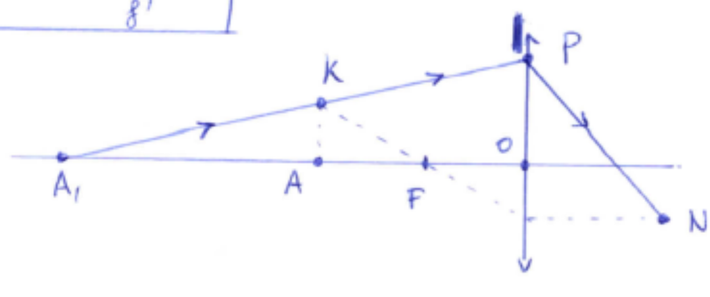
Comme A' est l'image de A par la lentille, que cette lentille est aplanétique (hypothèse lentille mince + condition de Gauss), la tache MN étant par construction dans un plan passant par A' et perpendiculaire à l'axe optique, un objet qui aurait pour image les points M et N se trouve donc dans un plan passant par A et perpendiculaire à l'axe optique.



Les rayons $\rightarrow$ et $\twoheadrightarrow$ passant par F sortent parallèles à l'axe optique. MN étant $\perp$ à l'axe optique, la longueur MN = la longueur IJ. Or MN correspond à la taille d'un pixel (limite de la taille de tache vu comme ponctuel par le capteur.
En effectuant le theorem de Thalès dans les triangles KLF et FIJ nous obtenons la relation demandée : $\boxed{\frac{KL}{r} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FO}}}$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AF} = \overline{AO} + \overline{OF} = d - f' \\ \overline{FO} = f'\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{KL = \frac{r(d-f')}{f'}}$$

Tout rayons passant par K arrive en N car K et N sont conjugués par la lentille et inversement (retour inverse de la lumière). Le rayon provenant de A_1, passant par P et arrivant en N passe donc forcément par K : A_1, K et P sont alignés



. On peut procéder de même avec les points A_1, L et Q.
On obtient donc deux droites $(A_1 P)$ et $(A_1 Q)$ coupées par deux segments [KL] et [PQ] parallèles entre eux, Thalès s'applique :

$$\frac{KL}{PQ} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1O}} \quad \text{soit d'après 40 :} \quad \boxed{\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1O}} = \frac{r(d-f')}{Df'}}$$

Pour des raisons identiques, on peut appliquer Thalès dans les triangles KA_2L et A_2PQ ce qui donne :

$$\boxed{\frac{\overline{AA_2}}{\overline{A_2O}} = \frac{r(d-f')}{Df'}}$$

D'après ~~la~~ formule ~~...~~ mathématique, si $\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1O}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{A_2O}} = \frac{r(d-f')}{Df'}$

alors $\frac{\overline{A_1A} + \overline{AA_2}}{\overline{A_1O} + \overline{A_2O}} = \frac{r(d-f')}{Df'}$ et $\frac{\overline{A_1A} - \overline{AA_2}}{\overline{A_1O} - \overline{A_2O}} = \frac{r(d-f')}{Df'}$ (en supposant que $\overline{A_1O} \neq \pm \overline{A_2O}$ ce qui est le cas physiquement)

Ces formules nous conduisent aux relations en utilisant Chasles ($\overline{A_1A} + \overline{AA_2} = \overline{A_1A_2}$ et $\overline{A_1O} - \overline{A_2O} = \overline{A_1O} + \overline{OA_2} = \overline{A_1A_2}$)

$$\overline{A_1A_2} = \frac{r(d-f')}{f'D} \times (\overline{A_1O} + \overline{A_2O})$$

$$\iff \overline{A_1A_2} = \frac{r(d-f')}{f'D} \times (\overline{A_1A} + \overline{A_2A} + 2d) \quad \text{d'après Chasles}$$

$$\iff \overline{A_1A_2} = \frac{r(d-f')}{f'D} \times \left(\frac{r(d-f')}{f'D} \times \overline{A_1A_2} + 2d\right) \quad \text{d'après la formule (2) de droite}$$

$$\iff \overline{A_1A_2}\left[1 - \left(\frac{r(d-f')}{f'D}\right)^2\right] = \frac{2dr(d-f')}{f'D} \quad \text{en mettant en facteur } \overline{A_1A_2}$$

$$\iff \overline{A_1A_2} = \frac{2drN(d-f')}{f'^2\left(1 - \left(\frac{r(d-f')}{f'D}\right)^2\right)} \quad \text{avec } N = \frac{f'}{D}$$

$$\iff \boxed{\overline{A_1A_2} = \frac{2drN(d-f')}{f'^2 - \frac{r^2N^2(d-f')^2}{f'^2}}}$$

44. On est censé avoir $\overline{A_1A_2} \longrightarrow +\infty$: c'est le cas quand le dénominateur tend vers 0 pour $d \longrightarrow \frac{f'^2}{Nr} + f'$. Généralement comme $H = \frac{f'^2}{Nr} \gg f'$, faire tendre d vers H ou vers $H + f'$ donne le même résultat physique, à savoir une profondeur de champ qui tend vers $+\infty$ (l'objet A_1 est net en $+\infty$)

45. On a $\overline{A_1A_2} \simeq 2H$ lorsque $f' \ll d \ll H$ ce qu'il fallait énoncé
Les liens entre profondeur de champs, temps d'exposition et taille de capteur que l'on a trouvé dans les parties précédentes pour la distance hyperfocale avec un réglage à l'infini de l'APN restent valables lorsque $f' \ll d \ll H$.
La distance hyperfocale est une grandeur caractéristique d'un APN essentielle pour un photographe.