Devoir Maison Facultatif

Thème : Optique - À rendre le mardi 7 novembre

1 Loupe (d'après Saint-Cyr, 1994)

Dans cet exercice, on s'intéresse à un système centré, l'axe optique étant orienté positivement dans le sens de propagation de la lumière.
Un observateur emmétrope (c'est-à-dire ayant une vision normale) peut voir distinctement des objets situés à une distance comprise entre d_m et l'infini (à l'infini, l'observation se fait sans accommodation, donc sans fatigue).

1. Un observateur emmétrope regarde à l'œil nu un tout petit objet plan, que l'on assimile à un segment AB, de longueur ℓ, orthogonal à l'axe optique Ox. Déterminer α_m l'angle maximal sous lequel est vu l'objet.
2. L'observateur regarde AB à travers une lentille mince convergente, de distance focale f' et de centre O (loupe). Son œil est situé à une distance a de la loupe ($a < d_m$).

(a) Déterminer les positions de l'objet rendant possible l'observation d'une image nette. Faire une construction géométrique de l'image. L'image est-elle droite ou renversée ?
(b) Pour quelle position l'observation se fait-elle sans fatigue d'accommodation ? Exprimer l'angle α sous lequel est vu l'objet dans ce cas.
Application numérique : que vaut le grossissement commercial de la loupe $G = \alpha/\alpha_m$? On donne $\mathrm{d_m} = 0,25$ m, $\mathrm{f'} = 50$ mm.

2 Aberrations chromatiques (d'après CCP MP, 2008)

La vergence V d'une lentille mince est donnée par la relation algébrique suivante :

$$V = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{S_1C_1}} - \frac{1}{\overline{S_2C_2}}\right)$$

où n est l'indice de réfraction du verre constituant la lentille ; S_1 et S_2 sont respectivement les sommets de la face avant et arrière de la lentille, C_1 et C_2 les centres des dioptres la constituant. On notera R_1 et R_2 les diamètres de courbure de ces dioptres (R_1 et R_2 positifs).
L 'indice n varie avec la longueur d'onde λ suivant la loi empirique de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}, \quad A \text{ et } B \text{ étant deux constantes positives.}$$

Pour un verre de type crown, $A = 1,515$ et $B = 3,5\cdot 10^3$ nm^2.
On définit la constringence ν et le pouvoir dispersif K d'un verre par :

$$\nu = \frac{1}{K} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

où n_F, n_D et n_C sont les indices du verre pour les radiations F (bleu : $\lambda_F = 486$ nm), D (jaune : $\lambda_D = 589$ nm) et C (rouge : $\lambda_C = 656$ nm).
On notera $\mathrm{f'_F, f'_D}$ et $\mathrm{f'_C}$ les distances focales et $\mathrm{F'_F, F'_D}$ et $\mathrm{F'_C}$ les foyers images de la lentille pour les radiations F, D et C respectivement.
On considère une lentille ($\mathscr{L}$), en verre crown, biconvexe avec les diamètres de courbure $R_1 = 90$ cm et $\mathrm{R_2} = 150$ cm. Le diametre de ($\mathscr{L}$) est $\mathscr{D} = 8$ cm.

1. Calculer avec le nombre de chiffres significatifs correct les indices n_F, n_D et n_C. En déduire la constringence ν et le pouvoir dispersif K du verre crown.
2. Déterminer la distance focale moyenne f'_D de ($\mathscr{L}$) et indiquer (sans calcul) la position relative des foyers $\mathrm{F'_F}$ et $\mathrm{F'_C}$ sur l'axe optique.
3. L'aberration chromatique longitudinale d'une lentille est définie par la distance algébrique $A_L = \overline{\mathrm{F'_F F'_C}}$ qui sépare les foyers bleu $\mathrm{F'_F}$ et rouge $\mathrm{F'_C}$.

Exprimer A_L en fonction de la constringence ν et de la distance focale moyenne f'_D, en supposant que $f'_F f'_C \simeq f'_D$. Commentaire. Calculer numériquement A_L.

4. On définit l'aberration chromatique transversale A_T d'une lentille comme le diamètre de la plus petite tache lumineuse produite par les faisceaux bleu et rouge, interceptée par un écran disposé normalement à l'axe optique.

Exprimer A_γ pour ($\mathscr{L}$) en fonction de la constringence ν et de $\mathscr{D}$, en supposant de plus que f'_D est quasiment la moyenne arithmétique de f'_F et f'_C. Commentaire. Calculer la valeur de A_T.

3 Objectif achromatique (d'après CCP MP, 2008)

Cet exercice consiste à rechercher les conditions pour limiter l'aberration chromatique, c'est-à-dire les défauts de formation des images dus à la dispersion dans un verre. Les lentilles minces sont utilisées dans le cadre de l'approximation de Gauss. La vergence V d'une lentille mince est donnée par la relation algébrique suivante :

$$V = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{S_1C_1}} - \frac{1}{\overline{S_2C_2}}\right)$$

où n est l'indice de réfraction du verre constituant la lentille ; S_1 et S_2 sont respectivement les sommets de la face avant et arrière de la lentille, C_1 et C_2 les centres des dioptres la constituant. On notera R_1 et R_2 les rayons de courbure de ces dioptres.
On réalise un objectif achromatique mince en accolant une lentille biconvexe en verre crown, de rayons de courbure R_1 et R_2, avec une lentille plan-concave en verre de type flint, de sorte que les faces en contact ajent le même rayon de courbure R_2.
Les indices de réfraction des deux verres sont donnés par la loi de Cauchy :

- lentille en verre crown, $n_1 = A_1 + \frac{B_1}{\lambda^2}$ avec $A_1 = 1,515$ et $B_1 = 3,5\cdot 10^3$ nm^2 ;
- lentille en verre flint, $n_2 = A_2 + \frac{B_2}{\lambda^2}$ où A_2 et B_2 sont à déterminer.

1. Exprimer les vergences V_1 et V_2 respectivement des lentilles en verre crown et en verre flint en fonction des constantes A_1, A_2, B_1, B_2, des rayons R_1, R_2 et de λ. En déduire la vergence $V = V_1 + V_2$ des deux lentilles accolées.
2. Déterminer l'expression de $\partial V/\partial\lambda$. Que doit valoir cette expression pour supprimer l'aberration chromatique ? En déduire une relation entre B_1, B_2, R_1 et R_2, puis exprimer la vergence V en fonction de A_1, A_2, R_1 et R_2.

4 Interférométrie stellaire (CCP 1998)

En 1996, les astronomes ont déterminé, avec une excellente précision, la géométrie de l'étoile double Capella, dans le domaine spectral du proche infrarouge. La méthode utilisée est celle qui fut imaginée dès 1868 par Fizeau, puis mise en œuvre pour la première fois par Michelson en 1920, dans le domaine visible.

L'apport nouveau réside dans la neutralisation des effets perturbants de la turbulence atmosphérique par l'utilisation de trois télescopes : on combine convenablement les facteurs de visibilité des franges d'interférence obtenues avec les différents couples de télescopes.

4.1 Distance angulaire d'une étoile double symétrique

On pointe, avec le dispositif des fentes de Young, le centre Ω d'une étoile double symétrique; cette étoile est constituée de deux sources primaires incohérentes E_1 et E_2, de contributions égales en intensité : $I_{s1} = I_{s2} = I_s$.

On oriente la direction définie par les fentes de telle sorte que F_1 F_2 passant par O soit parallèle à E_1E_2 (Figure 1). La largeur ε de chacune des fentes est négligeable devant la distance a qui les sépare.

On désigne par λ la longueur d'onde, D_s la distance ΩO, x_{s1} la position de E_1 selon un axe Ωx_s parallèle à l'axe pupillaire Ox et x_{s2} la position analogue de E_2. On a ici : $x_{s2} = -x_{s1}$.

1. Quelles sont, en fonction de I_s, λ, a, X, f, D_s, X_{sl} et X_{s2}, les contributions de E_1 et E_2 dans l'éclairement du plan focal de la lentille?
2. Montrer, sans calcul, que la répartition de l'éclairement devient uniforme lorsque la distance a des deux fentes prend une valeur particulière a_1 que l'on déterminera en fonction de λ et de la distance angulaire θ qui sépare E_1 et E_2.
3. Etablir l'expression de la répartition de l'éclairement résultant des contributions de E_1 et E_2. Dans le cas de Capella, supposée symétrique dans le visible, pour $\lambda = 635$ nm, on a trouvé $a_1 = 116,5$ cm. En déduire θ en milliseconde d'arc.

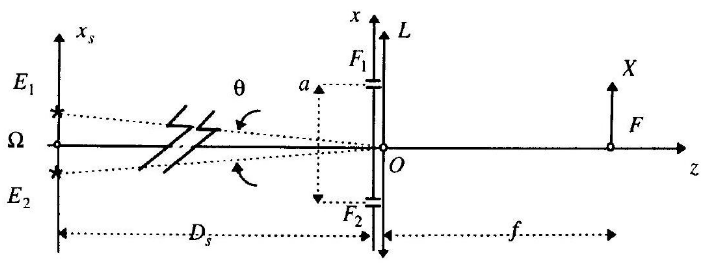

Figure 1

4.2 Interféromètre à deux télescopes

Au lieu d'utiliser un seul télescope dont la pupille est percée de deux trous, on couple deux télescopes identiques T_1 et T_2, de même ouverture circulaire, de diamètre négligeable par rapport à la ligne de base a = T_1 T_2 (Figure 2). Dans ce cas, la position moyenne de l'étoile est repérée par l'angle α, différent de 0 , que fait, avec la normale à T_1 T_2, la direction $O\Omega$, O étant le milieu de T_1 T_2.

On désigne ici aussi par D_s la distance $O\Omega$, x_{sl} la position de E_1 selon un axe Ωx_s perpendiculaire à la direction $O\Omega$, et x_{s2} la position analogue de E_2, avec : $x_{s2} = -x_{s1}$.

Un dispositif annexe permet de faire interférer les ondes optiques issues des deux foyers images en introduisant une différence de marche supplémentaire L, déterminée.

On se place dans le cas où a = 6,10 m et $\alpha = 60°$. En outre, le rayonnement est quasi-monochromatique et centré sur la longueur d'onde $\lambda = 635$ nm. Enfin l'étoile est supposée symétrique : $I_{s1} = I_{s2} = I_s$.

1. Exprimer, en fonction de λ, α, L_s a, x_{s1}, x_{s2} et D_s les différences de phase ϕ_1 et ϕ_2 associées à E_1 et E_2.,
2. Montrer que l' éclairement total I s'écrit : $I = 2I_s\left[1+\cos\left(\frac{\pi b\theta}{\lambda}\right)\cos\left(2\pi\frac{1+L_s}{\lambda}\right)\right]$
   b et 1 étant des longueurs que l'on déterminera en fonction de a et de α.
3. Trouver, en milliseconde d'arc, la plus petite distance angulaire que l'on a pu détecter en obtenant un éclairement uniforme avec les valeurs précédentes de a, λ et α. Quel est l'intérêt d'un tel système par rapport à celui décrit à la question 4?
4. On s'arrange généralement pour que $L_s = -1$. Quelle en est la raison?

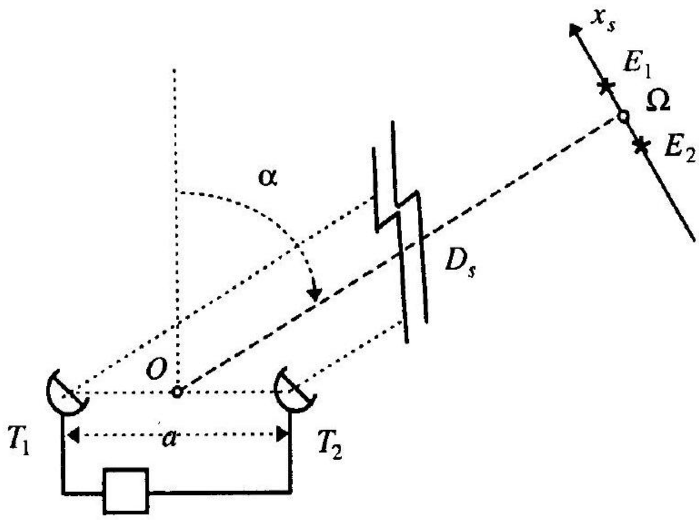

Figure 2