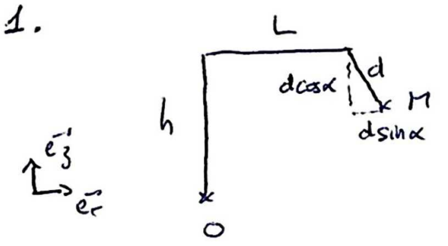
Exercice 6

1.



$$\boxed{\vec{OM} = (L + d\sin\alpha)\vec{e_r} + (h - d\cos\alpha)\vec{e_z}}$$

$$\vec{v}(M)_{/R} = d\dot{\sin\alpha}\,\vec{e_r} + (L + d\sin\alpha)\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_R + (-d\dot{\cos\alpha})\vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{v}(M)_{/R} = d\dot{\alpha}\cos\alpha\,\vec{e_r} + (L + d\sin\alpha)\omega\,\vec{e_\theta} + d\dot{\alpha}\sin\alpha\,\vec{e_z}}$$

2. α constant $\Rightarrow$ distance à l'axe constant $\Rightarrow$ mouvement circulaire
ω constant $\Rightarrow$ mouvement uniforme (vitesse $= \dot{\theta} \times$ distance axe $=$ constante)
On peut vérifier avec la Q1 : $\boxed{\vec{v}(M)_{/R} = \underbrace{(L + d\sin\alpha)\omega}_{\text{constant}}\,\vec{e_\theta}}$ ← tangent à la trajectoire circulaire.

$\vec{a}(M)_{/R} \neq \vec{0}$ ⚠ mouvement à vitesse constante $\neq$ vecteur vitesse constant ⚠
$\|\vec{v}\| = cte$ — mais → $\vec{v} \neq \vec{cte}$ (dépend de $\vec{e_\theta}$)

$$\vec{a}(M)_{/R} = (L + d\sin\alpha)\omega \times \underbrace{(-\dot{\theta}\vec{e_r})}_{\text{dérivée de } \vec{e_\theta} \text{ par rapport à } t.}$$

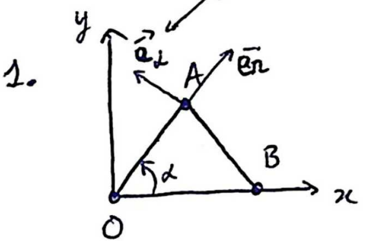
$$\boxed{\vec{a}(M)_{/R} = -(L + d\sin\alpha)\omega^2\vec{e_r}}$$

Remarque : $\vec{a}$ centripète, $\|\vec{a}\| = \frac{\|\vec{v}\|^2}{L + d\sin\alpha}$ ← distance de M à l'axe

Exercice 3

dans le "même sens" que α

1.



cours — notations de l'exo

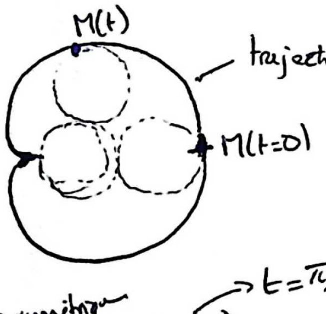
$\vec{OA} = L\vec{e_r}$
$\vec{v_A}$ "=" $L\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ "=" $L\dot{\alpha}\vec{e_\alpha}$
$\vec{a_A} = L\ddot{\alpha}\vec{e_\alpha} - L\dot{\alpha}^2\vec{e_r}$

2. $\vec{OB} = x_B\vec{e_x} = 2L\cos\alpha\,\vec{e_x}$
$\vec{v_B} = -2L\dot{\alpha}\sin\alpha\,\vec{e_x}$
$\vec{a_B} = -2L(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha)\vec{e_x}$

Exercice 4

1. $r_0 = r(\theta = 0) =$ distance $OM(t=0) = 4R$

2.



trajectoire en forme de coeur

3. $\vec{OM} = r\,\vec{u_r}$ d'après l'énoncé $r(\theta) = \frac{r_0}{2}(1 + \cos\theta)$

$$\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\underbrace{\dot{\theta}}_{\omega}\,\vec{u_\theta}$$

$$= -\underbrace{\dot{\theta}}_{\omega}\frac{r_0}{2}\sin\underbrace{\theta}_{\omega t}\,\vec{u_r} + \underbrace{r}_{\frac{r_0}{2}(1+\cos\theta)}\omega\,\vec{u_\theta}$$

$$\boxed{\vec{v} = -\omega\frac{r_0}{2}\sin(\omega t)\,\vec{u_r} + r\omega\,\vec{u_\theta}}$$

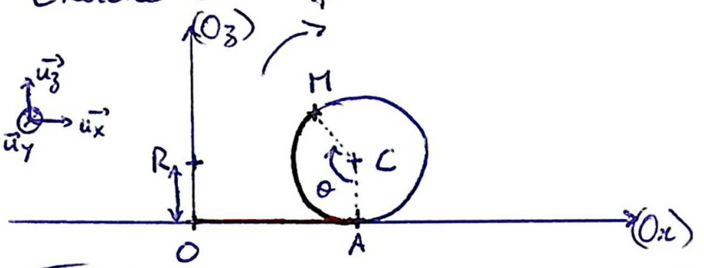
4. $\|\vec{v}\| = \|\vec{0}\|$ pour ... impossible selon $\vec{u_\theta}$?
⟹ la composante sur $\vec{u_r}$ s'annule pour $\omega t = 0$ et $\omega t = \pi$ (modulo 2π)
→ la composante sur $\vec{u_\theta}$ s'annule en $\theta = \pi$ ($r = 0$)

5. symétrique

$$p = 2\int_{M(t=0)}^{M(\theta=\pi)} \|d\vec{OM}\| = 2\int_0^{\pi/\omega} \|\vec{v}\|\,dt \qquad (M(\theta=\pi) \to t = \pi/\omega)$$

$$= 2\int_0^{\pi/\omega} \sqrt{(\cos(\omega t)+1)^2 + \sin^2(\omega t)}\,\frac{r_0\omega}{2}\,\frac{dt}{d\theta} = 2\int_0^{\pi}\frac{r_0}{2}\sqrt{2 + 2\cos(\theta)}\,d\theta = 4r_0 = 16R$$

Exercice 5 :



1) Roule sans glisser si :

longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ = distance parcourue OA

soit $\boxed{R\theta = x_C}$

2) $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AC} + \vec{CM}$

$= x_C\vec{u_x} + R\vec{u_z} - R\cos\theta\,\vec{u_z} - R\sin\theta\,\vec{u_x}$

$\boxed{\vec{OM} = (x_C - R\sin\theta)\vec{u_x} + R(1-\cos\theta)\vec{u_z}}$

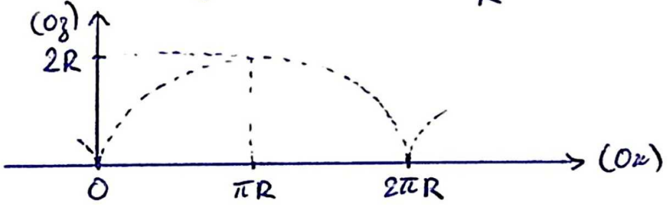
$\boxed{\vec{v} \overset{def}{=} \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = v(1 - \cos\theta)\vec{u_x} + v\sin\theta\,\vec{u_z}}$

$\boxed{\vec{a} = \left.\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right|_R = \Big(\underbrace{\cancel{-R\ddot{\theta}\cos\theta}}_{\dot{\theta}=cte} + \frac{v^2}{R}\sin\theta\Big)\vec{u_x} + \Big(\cancel{R\ddot{\theta}\sin\theta} + \frac{v^2}{R}\cos\theta\Big)\vec{u_z}}$ en utilisant $\underline{R\dot{\theta} = v}$

3) M touche le sol pour $\theta = 0\,[2\pi]$, on a alors :

$$\begin{cases} \vec{v} = 0\,\vec{u_x} + 0\,\vec{u_z} \\ \vec{a} = 0\,\vec{u_x} + \frac{v^2}{R}\vec{u_z} \end{cases}$$

4)



5) L longueur d'un arc de cycloïde, correspond à intégrer $\|d\vec{OM}\|$ pour M allant de (0,0) à $(2\pi R, 0) \equiv B$

$$L = \int_{(0,0)}^{(2\pi R,0)} \|d\vec{OM}\| = \int_{t=0}^{t_B} \|\vec{v}\|\,dt = \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} \left\|\frac{d\vec{OM}}{d\theta}\right\| d\theta}_{\text{plus adapté au problème}}$$

t_B : durée pour aller en B

$$\vec{OM} = (R\theta - R\sin\theta)\vec{u_x} + R(1-\cos\theta)\vec{u_z}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{d\theta} = (R - R\cos\theta)\vec{u_x} + R\sin\theta\,\vec{u_z}$$

$$\left\|\frac{d\vec{OM}}{d\theta}\right\| = R\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{2}\,R\sqrt{1-\cos\theta} = 2R\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \overset{\text{pour } \theta\in[0,2\pi]}{=} 2R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

soit $L = 4R\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{d\theta}{2} = 4R\int_{\theta=0}^{\pi}\sin(x)\,dx = \underline{8R}$