

4. Pour passer de 20 Hz à 20 kHz on multiplie la fréquence par 1000. il se trouve que  $1000 \approx 2^{10}$ , i.e., on multiplie 10 fois la fréquence de 20 Hz par un facteur 2 (multiplication par 2 pour chaque octave) pour arriver à 20 kHz, soit 10 octaves entre 20 Hz et 20 kHz. [1]
5. Formule trigo :  $\sin(a)\sin(b) = 0.5\cos(a-b) - 0.5\cos(a+b)$ . [1]
6. La fréquence est définie positive en physique. Si  $f_1 - f_2 < 0$  alors le signal à une fréquence  $-(f_1 - f_2) > 0$ . On a en effet le même signal :  $\cos(2\pi(f_1 - f_2)t) = \cos(2\pi(f_2 - f_1)t)$ . (Remarque : attention au signe de la phase à l'origine s'il y en a une). [1]
7. RLC série : "loi des mailles" + "caractéristique courant tension des dipôles" [1].

$$\frac{d^2 U_1}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_1}{dt} + \frac{U_1}{LC} = 0 \quad [\text{notations} + \text{équation}/1]$$

8. L'équation différentielle est du 2ème ordre et la pulsation propre est  $1/\sqrt{LC}$  par identification avec la forme canonique. La fréquence est égale à la pulsation divisé par  $2\pi$  d'où l'expression [1]
9.  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  [1]
10. Cf poly cours, remplacer  $y(t)$  par  $U_1(t)$ ,  $\omega_0$  par  $2\pi f_1$ , et  $Y_0$  par 0 car équation sans second membre donc solution particulière = 0 [1].
11. Si R tend vers 0 pas de dissipation de l'énergie : équation oscillateur harmonique. [1]
12. Pour C et  $C_v$  en parallèles, on forme un condensateur équivalent  $C_{eq} = C + C_v$ . [1]
13.  $C_{eq} = C + C_v = C \left(1 + \frac{C_v}{C}\right)$ . Donc  $\varepsilon = \frac{C_v}{C}$ , avec (d'après le document 4)  $C_v = 0,5$  pF,  $C = 10$  pF =  $10^{-11}$  F donc  $\varepsilon = 0,05$ . [1]
14. RLC série : "loi des mailles" + "caractéristique courant tension des dipôles". [1]

$$\frac{d^2 U_1}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_1}{dt} + \frac{U_1}{LC(1+\varepsilon)} = 0 \quad [\text{notations} + \text{équation}/1]$$

- 15.
- $$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC_{eq}}} = \frac{1}{\sqrt{LC(1+\varepsilon)}}$$
16.  $\varepsilon = 0,05 \ll 1$ , le développement limité à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  donne la formule demandée [1] :
- $$\omega_2 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$
17. Si R tend vers 0 pas de dissipation de l'énergie : équation oscillateur harmonique et solution du type  $A\cos(\omega t + \varphi)$ . [1]
18. Même phase à l'origine, même tension à  $t = 0$  (les conditions initiales sont identiques). De plus pas de présence d'une enveloppe exponentiellement décroissante, donc  $R = 0$ . [1]
19.  $f_1 = 20$  kHz donc  $f_2 = (1 - 0,025)20$  kHz  $\approx 20$  kHz (modification de 2,5% en dessous de la précision des valeurs  $f_1$  et  $\varepsilon$ , attention au nombre de chiffres significatifs). Quasiment pas de modification de la fréquence. [1]
20. Pas de modification de la fréquence suffisante pour faire varier la fréquence d'un facteur 1000 (uniquement d'un facteur 0,025). Impact de l'instrumentiste non détectable si la fréquence  $f_1$  est fixée à 20kHz, d'où l'idée d'augmenter cette fréquence. [1]

$$E(t) = \frac{\alpha U^2}{2} [\cos(2\pi(f_1 - f_2)t) - \cos(2\pi(f_1 + f_2)t)] \quad [1]$$

22.  $\dim(\alpha U^2) = \dim(E) = \dim(U)$ . Donc  $\dim(\alpha) = \dim\left(\frac{1}{U}\right)$ ,  $\alpha$  est homogène à l'inverse d'une tension. [1]

$$23. f^- = f_1 - f_2 = \frac{\varepsilon}{2} f_1 \text{ et } f^+ = f_1 + f_2 = f_1 \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad [1]$$

$$24. E^- = E^+ = \frac{\alpha U^2}{2}, \text{ la phase } \pi \text{ dans le deuxième signal provenant du - devant le cosinus. [1]}$$

25. Régime sinusoïdal forcé. [1]

26. Schéma avec impédance  $Z_C$  et pont diviseur de tension [1].

$$\underline{H}(f) = \frac{1}{1 + jR'C'2\pi f} \quad [1]$$

27. Filtre passe bas du premier ordre (étude qualitative BF HF avec schéma ou avec lim de la fonction de transfert) [1]. Pour  $f = 0$ ,  $|\underline{H}|$  est maximal et vaut 1. La fréquence de coupure vérifie  $|\underline{H}(f = f_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  soit :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (R'C'2\pi f_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad [1]$$

On obtient alors

$$f_c = \frac{1}{2\pi R'C'}$$

28. Cf cours. Gain : ordonné en dB, abscisse  $\omega$  en échelle log [1] présence de la freq de coupure, asymptotes (BF : 0dB, HF : -20dB/dec) [1] Allure phase de 0 à  $-\pi/2$  [1]
29. On pourrait écrire  $S(t)$  à la fréquence  $f$  sous la forme [2] :

$$\begin{aligned} S(f, t) &= |\underline{H}(f)| E_0 \cos(2\pi f t + \arg(\underline{H}(f))) \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \cos\left[2\pi f t - \arctan\left(\frac{f}{f_c}\right)\right] \end{aligned}$$

30. Si  $f \ll f_c$ , alors l'amplitude est proche de  $E_0$  et la phase est proche de 0 soit  $S(f, t) \approx E_0 \cos(2\pi f t)$ . [1] Si  $f \gg f_c$ , alors  $S(f, t) \approx \frac{f_c E_0}{f} \cos(2\pi f t - \pi/2)$ . [1]
31. Condensateur à basse fréquence équivalent à un interrupteur ouvert, (à représenter sur un schéma [1] avec " $i \approx 0$ " donc pas de différence de potentiel aux bornes de R, donc  $E(t) \approx S(t)$ ) [1]
- 32.

$$\begin{aligned} S(f, t) &= \frac{E^-}{\sqrt{1 + \left(\frac{f^-}{f_c}\right)^2}} \cos\left[2\pi f^- t - \arctan\left(\frac{f^-}{f_c}\right)\right] \\ &+ \frac{E^+}{\sqrt{1 + \left(\frac{f^+}{f_c}\right)^2}} \cos\left[2\pi f^+ t + \pi - \arctan\left(\frac{f^+}{f_c}\right)\right] \end{aligned}$$

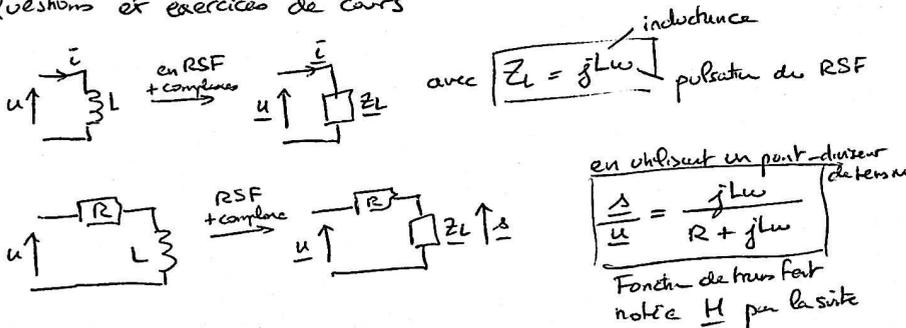
$$33. f^- < f_c \ll f^+ \quad [1]$$

34.  $f_1 = 2f^- / \varepsilon = 800$  kHz et  $f_2 = 780$  kHz fréquences inaudibles car supérieures à 20 kHz mais la différence des deux fréquences est une fréquence audible. [2]

35. Lorsque l'instrumentiste éloigne sa main,  $C_v \approx 0$  donc les deux oscillateurs ont la même fréquence et  $f_1 - f_2 = 0$  Hz. Lorsque l'instrumentiste approche sa main de l'antenne,  $C_v \approx 0,5$  pF donc les deux oscillateurs ont des fréquences différentes séparées de 20kHz  $f_1 - f_2 = 20$  kHz. Il obtient donc les dix octaves en contrôlant la distance entre l'antenne et sa main. [1]

I - Questions et exercices de cours

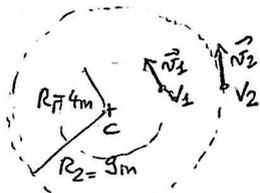
1.



- expression  $jLw$  /1
- définition des notations ( $L, w$ ) /1
- expression  $H$  /1
- pont div / schéma / notation /1
- équivalent pour  $w \ll w_c$  /1
- multiplié par  $jw$  de l'équation /1
- $f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L}$  /1

pour  $w \rightarrow 0$ ,  $H \sim \frac{jLw}{R}$   
 soit  $\Delta = \frac{L}{R} \times jw u$   
 équivalent à une dérivée par un RSF  
 Ce comportement se manifeste pour  $w \ll w_c$  la  
 pulsation de coupure du filtre :  $w_c = \frac{R}{L}$  ( $H(w=w_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ )  
 soit  $f \ll \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L}$

2.



Pour une trajectoire circulaire exécutée à vitesse constante, l'accélération est dirigée vers le centre de la vitesse dirigée par le rayon de courbure. Ici  $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = v$   
 Voiture 1 : accélération  $\frac{v^2}{R_1}$   
 Voiture 2 : accélération  $\frac{v^2}{R_2}$   
 On a  $\frac{v^2}{R_1} > \frac{v^2}{R_2}$

- $\frac{v^2}{R}$  /1
- $a_1 > a_2$  /1
- a dirigée vers le centre C. /1

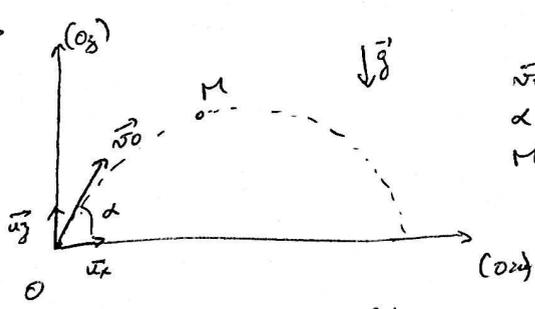
La voiture 1 subit la plus d'accélération ( $R_1 < R_2$ )  
 Elle est dirigée vers le centre C du "rayon de courbure" (cercle osculateur).

Pour avoir une accélération de l'ordre de 10% de  $g$   
 (une voiture sur route maculée peut se mettre à glisser) alors :

	Voiture 1	Voiture 2
accélération	$0,1g$	$0,1g$
vitesse	$\sqrt{0,1g R_1}$	$\sqrt{0,1g R_2}$
AN vitesse	$\approx 2 \text{ m/s}$ (7 km/h)	$\approx 3 \text{ m/s}$ (11 km/h)

- expression /1
- AN en km/h /1

3.



$\vec{v}_0$  : vecteur vitesse initial  
 $\alpha$  : angle entre  $\vec{u}_x$  et  $\vec{v}_0$   
 M : balle de canon de masse  $m$

- Schéma et notations /1

On prendra  $R$  : référentiel terrestre supposé galiléen d'origine  $O$ ,  
 $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  base 2D (mouvement plan)

- $R$  terrestre /1

On peut appliquer le principe fondamental de la dynamique sur le point M:

$$m \vec{a}_{M/R} = m \vec{g}$$

(les forces de frottement ont été négligées)

PFD sur M avec frot négligés /1

En utilisant les coordonnées du point M ( $x, z$ ) et les vecteurs de la base cartésienne on obtient deux équations;

$$\text{sur } \vec{u}_x : m \ddot{x} = 0$$

$$\text{sur } \vec{u}_z : m \ddot{z} = -mg$$

En intégrant 2 fois par rapport au temps et en utilisant les conditions initiales:

	vitesses initiales	positions initiales
sur $\vec{u}_x$	$v_0 \cos(\alpha)$	0
sur $\vec{u}_z$	$v_0 \sin(\alpha)$	0

conditions initiales avec l'angle  $\alpha$  /1

avec  $v_0$  la vitesse initiale, on obtient:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t$$

$$z(t) = -\frac{g t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha) t$$

expressions  $x(t), z(t)$  /1

En remplaçant  $x$  et  $t$  par  $\frac{x(t)}{v_0 \cos(\alpha)}$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) dans  $z(t)$ :

$$z(t) = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha) x$$

$z$  fct de  $x$  /1

Le boulet touche le sol ( $z=0$ ) en  $x_0=0$  et en  $x_s$  vérifiant

$$-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_s^2 + \tan(\alpha) x_s = 0$$

expression de  $x_s$  en fct de  $\alpha$  et  $v_0$  /1

$$\text{soit } x_s = \frac{2 v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g}$$

En remarquant que  $2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) = \sin(2\alpha)$ ,

$$x_s = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

Bonus +1 pour forme avec  $\sin(2\alpha)$

Maximiser  $x_s$  en fonction de  $\alpha$  revient à maximiser  $\alpha \mapsto \sin(2\alpha)$

$$\alpha = \pi/4 \quad /1$$

pour  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , soit  $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Il faut donc tirer à  $45^\circ$  pour avoir la portée de tir maximale.