Chapitre 14 Circuits du premier ordre

1 Introduction

Nous allons voir dans ce chapitre la réaction d'un circuit dit du premier ordre : c'est un circuit dont une des variables (tension aux bornes d'un composant ou intensité le traversant) suit une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. Cela concerne les circuits RL et RC.

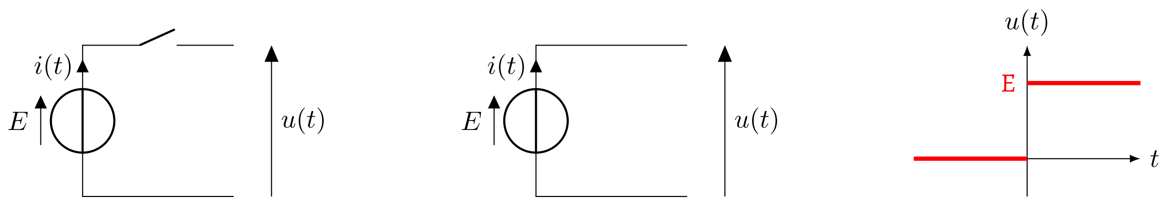
Définition 1 - Régime transitoire

Un régime transitoire correspond au régime de fonctionnement d'un système entre deux régimes permanents différents comme dans les deux exemples suivants :

- L'élongation d'un amortisseur de voiture après le passage d'un dos d'âne : le ressort est au repos avant et bien après le passage sur le ralentisseur (régime permanent) et il oscille entre ces deux régimes (régime transitoire).
- Lorsqu'on appuis sur un interrupteur pour allumer une ampoule, le régime entre l'ampoule allumée et l'ampoule éteinte (régimes permanents) passe par un régime transitoire (chauffage progressif du filament).

2 Etude qualitative d'un régime transitoire

Nous allons nous intéresser au régime transitoire d'un circuit RC et d'un circuit LC, soumis à un échelon de tension. Un échelon de tension correspond à faire passer rapidement la tension dans un circuit d'une valeur à une autre. On effectuera généralement cette action avec l'aide d'un interrupteur [1] et d'un générateur comme sur la figure 14.1 ci-dessous.



Pour $t < 0$ — Pour $t \geq 0$ — Représentation de $u(t)$

FIG. 14.1 – Représentation idéalisée d'un échelon de tension.

2.1 Circuit RC série

Expérience : Etude de la réponse d'un circuit RC série à un échelon de tension. Le but de l'expérience schématisée sur la figure 14.2 est de montrer :

1. **Les régimes permanents :** valeurs fixes de la tension aux bornes du condensateur pour $t < 0$ et $t \to \infty$.
2. **Le régime transitoire :** montée en tension aux bornes du condensateur.
3. **Continuité de la tension :** aux bornes du condensateur, la tension est continue alors que la tension appliquée au circuit est discontinue.
4. **Temps caractéristique du régime transitoire :** la durée du régime transitoire dépend de la valeur des composants. Plus R et C sont grands, plus le temps de ce régime est long.

Exercice 14.1

Par analyse dimensionnelle, déterminer un temps caractéristique du circuit RC. Vérifier à partir des observations expérimentales si ce temps est bien caractéristique de la durée du régime transitoire.

1. La technique la plus employée pour basculer d'un régime permanent à un autre est l'utilisation des transistors

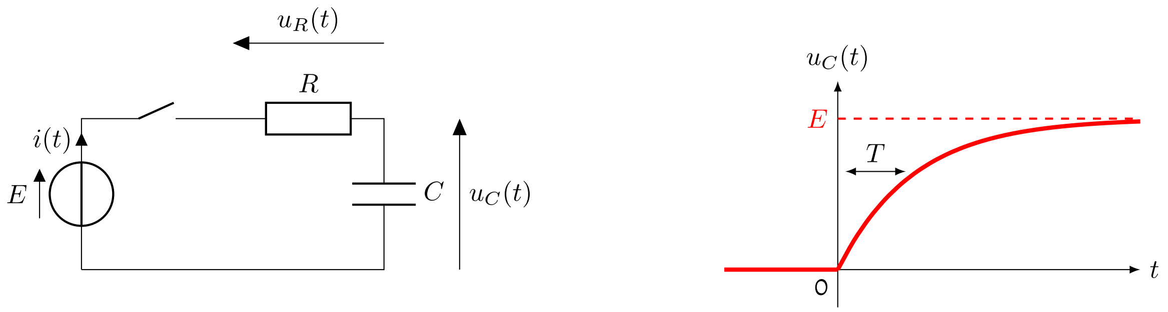


FIG. 14.2 – Représentation du circuit RC utilisé et visualisation de la réponse en tension au bornes du condensateur après fermeture du circuit via l'interrupteur (en $t = 0$).

2.2 Circuit LC série

Expérience : Etude de la réponse d'un circuit RL série à un échelon de tension. Le but de l'expérience schématisée sur la figure 14.3 est de montrer :

1. **Les régimes permanents :** valeurs fixes du courant traversant la bobine pour $t < 0$ et $t \to \infty$.
2. **Le régime transitoire :** montée du courant traversant la bobine.
3. **Continuité de la tension :** le courant traversant la bobine est continue.
4. **Temps caractéristique du régime transitoire :** la durée du régime transitoire dépend de la valeur des composants. Plus L et $1/R$ sont grands, plus le temps de ce régime est long.

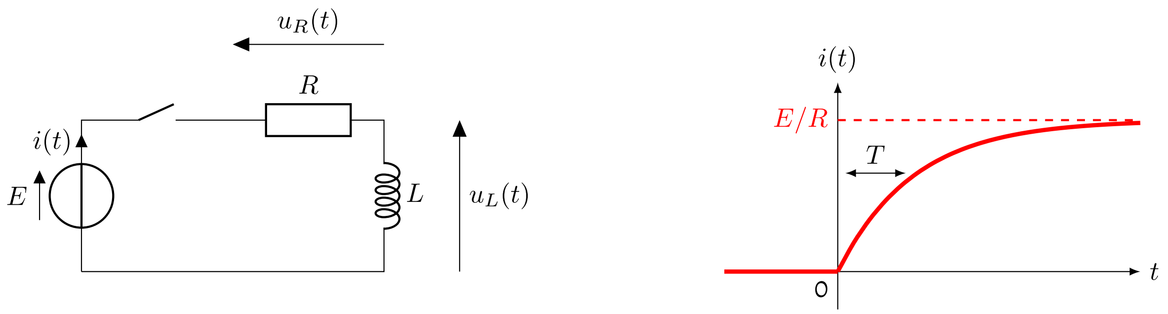


FIG. 14.3 – Représentation du circuit RL utilisé et visualisation de la réponse en courant traversant la bobine après fermeture du circuit via l'interrupteur (en $t = 0$).

Exercice 14.2

Par analyse dimensionnelle, déterminer un temps caractéristique du circuit RL. Vérifier à partir des observations expérimentales si ce temps est bien caractéristique de la durée du régime transitoire.

3 Etude quantitative des circuits du premier ordre

3.1 Condition aux limites pour un condensateur

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le courant $i(t)$ traversant un condensateur est relié à la dérivée de la tension à ses bornes $u_C(t)$ par la valeur de la capacité C :

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Cette relation conduit aux deux faits suivants :

1. Si la tension aux bornes du condensateur est discontinue, la dérivée de la tension est infinie au point de discontinuité, l'intensité est alors infini au point de discontinuité et l'énergie stockée est alors infinie au point de discontinuité. Ce n'est physiquement pas possible, l'hypothèse de départ est fausse.
2. Si les variations temporelles de la tension aux bornes du condensateur sont nulles alors le courant le traversant est nul.

En découle les deux propriétés suivantes :

Propriété 1

1. La tension aux bornes d'un condensateur en fonction du temps est une fonction continue.
2. Pour un régime **continue** (donc permanent [a]), tout se passe comme si le condensateur était un interrupteur ouvert.

a. Un régime continue est un régime permanent mais l'inverse n'est pas vrai. Un régime peut être considéré comme permanent s'il est périodique, l'exemple type est le régime sinusoïdal. Les variations temporelles ne sont donc pas nulles pour tout régime permanent.

Exercice 14.3

En reprenant le circuit RC série schématisé figure 14.2, exprimer les conditions aux limites de la tension $u_C(t)$ en $t \to 0^+$ et en $t \to +\infty$ (on suppose que le régime permanent continue est atteint pour $t \gg T$ et pour $t \leq 0$).

3.2 Condition aux limites pour une bobine

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la tension $u_L(t)$ aux bornes d'une bobine est reliée à la dérivée du courant $i(t)$ la traversant par la valeur de la bobine L :

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Pour des raisons similaires au cas du condensateur, découle les deux propriétés suivantes :

Propriété 2

1. Le courant traversant une bobine en fonction du temps est une fonction continue.
2. Pour un régime **continue**, tout se passe comme si la bobine était un fil.

Exercice 14.4

Proposer des raisons similaire au cas du condensateur pour expliquer les propriétés précédentes.

Exercice 14.5

En reprenant le circuit RL série schématisé figure 14.3, exprimer les conditions aux limites du courant $i(t)$ en $t \to 0^+$ et en $t \to +\infty$ (on suppose que le régime permanent continue est atteint pour $t \gg T$ et pour $t \leq 0$).

3.3 Equation différentielle du premier ordre

Définition 2

Une variable temporelle $y(t)$ qui vérifie une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants satisfait :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{y}{\tau} = \frac{K}{\tau} \tag{3.1}$$

où τ est une constante homogène à un temps et K est une constante homogène à y.

Définition 3

Un circuit est dit linéaire du premier ordre si une de ses grandeurs le caractérisant (courant, tension) vérifie une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant.

Exercice 14.6 - Portrait de phase d'un circuit linéaire du premier ordre

Supposons que la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC série (figure 14.2) vérifie l'équation différentielle (3.1). Tracer le portrait de phase de la tension aux bornes du condensateur. Déterminer C et τ ainsi que le sens d'évolution du système en utilisant les conditions aux limites déterminées dans l'exercice plus haut.
Faire de même avec l'intensité traversant une bobine.

Propriété 3

Les circuits RC et RL série sont linéaires du premier ordre :

- ☆ Pour le circuit RC série (cf figure 14.2), la tension aux bornes du condensateur vérifie pour $t \geq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}.$$

- ☆ Pour le circuit RL série (cf figure 14.3), le courant traversant la bobine vérifie pour $t \geq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}.$$

3.4 Solution d'une équation différentielle du premier ordre

Propriété 4

La solution temporelle de l'équation différentielle du premier ordre (3.1) est la somme de deux solutions :

$$y(t) = Y_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + K, \tag{3.2}$$

où

- ☆ La solution de l'équation homogène (lorsque $K = 0$) :

$$y_0(t) = Y_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec } Y_0 \text{ une constante,}$$

- ☆ La solution particulière de l'équation (obtenu en régime continu permanent, c'est-à-dire une solution indépendante du temps) :

$$y_1 = K.$$

Remarque importante : On remonte facilement à l'expression de la solution particulière en annulant le terme de la dérivée dans l'équation (3.1) : en effet, cette solution indépendante du temps à une dérivée temporelle ... nulle.

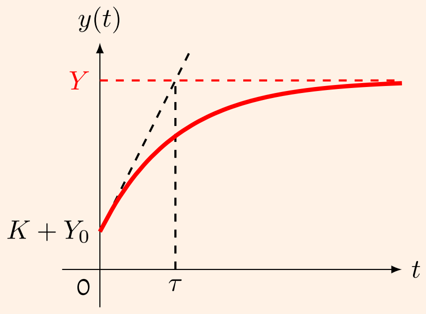
Exercice 14.7

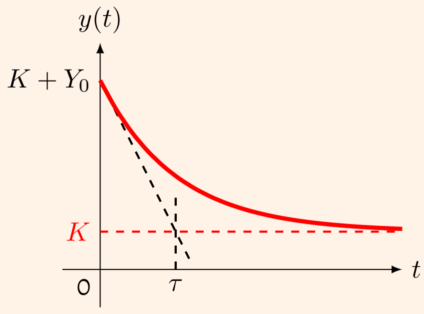
Un élève mesure la tension aux bornes d'un dipôle dans un circuit en fonction du temps. Il trouve une modélisation adéquate de ses données pour une tension vérifiant $u(t) = U_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ pour $t \geq 0$.

1. Le circuit est il linéaire du premier ordre ?
2. Tracer la solution en fonction du temps. Quelle est la valeur limite de la tension pour $t \to +\infty$?
3. Montrer que la tangente en $t = 0$ de la courbe atteint la valeur limite de la tension en $t = \tau$. Représenter cette caractéristique sur le schéma.
4. Pour quelle valeur de t la tension $u(t)$ atteint 95% de sa valeur limite ? Représenter cette valeur sur le schéma.
5. Tracer le portrait de phase associé à la tension $u(t)$.

Propriété 5

La valeur τ de la solution (3.2) peut être déterminée graphiquement à partir de l'intersection de la tangente à la solution en $t = 0$ et la valeur asymptotique de la solution en $t \to +\infty$.





De plus, $y(t)$ atteint 95% de sa valeur finale pour $t \simeq 3\tau$.

3.5 Résolution analytique : circuits RC et RL série

Reprenons les circuits RL et RC des figures 14.2 et 14.3. Nous pouvons montrer que :

	Circuit RC série	Circuit RL série
Loi des noeuds	L'intensité est la même dans tout le circuit	
Loi des mailles $t < 0$	$u_C(t) + u_R(t) = 0$	$u_C(t) + u_L(t) = 0$
Loi des mailles $t \geq 0$	$u_C(t) + u_R(t) = E$	$u_C(t) + u_L(t) = E$
Loi d'Ohm	$u_R(t) = Ri(t)$	
Autres relations	$i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$	$u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$
Equation différentielle	$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{E}{RC}$	$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$

Exercice 14.8

En appliquant les outils mathématiques vu précédemment (solution d'une équation différentielle du premier ordre) aux circuits RL et RC des figures 14.2 et 14.3, faire le lien avec l'étude qualitative du début de chapitre.
Que vérifie le courant dans le cas du circuit RC série ?

3.6 Etude énergétique

Propriété 6 - Puissance reçue, puissance fournie

En **convention récepteur**, la puissance dite **reçue** par le dipôle notée $P(t)$ à l'instant t vérifie :

$$P(t) = U(t)I(t)$$

La relation est la même pour la puissance dite **fournie** en **convention générateur**. La puissance s'exprime en Watt (W).

Remarque : La puissance $P(t)$ reçue en convention générateur vérifie $P(t) = -U(t)I(t)$.

Définition 4 - Accumulation d'énergie

L'accumulation d'énergie ΔE d'un dipôle entre deux instants successifs t_1 et t_2 est reliée à la puissance par la formule :

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété 7 - Puissance reçue par une résistance

La puissance P reçue par une résistance R en convention récepteur vérifie :

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$

Remarque : La puissance reçue par la résistance est dissipée sous forme thermique, c'est ce qu'on appelle l'effet Joule.

Propriété 8 - Energie stockée par une capacité

L'énergie stockée par une capacité C entre deux instants t_1 et t_2 en convention récepteur vérifie :

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} U(t)I(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}CU^2(t)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}C\left(U^2(t_2) - U^2(t_1)\right)$$

Propriété 9 - Energie stockée par une bobine

L'énergie stockée par une bobine d'inductance L entre deux instants t_1 et t_2 en convention récepteur vérifie :

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} U(t)I(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}LI^2(t)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}L\left(I^2(t_2) - I^2(t_1)\right)$$

Ordre de grandeur des composants rencontrés

Téléphone portable	W	Four électrique	kW
Ampoule électrique classique	50W	Centrale nucléaire	GW
Ordinateur, télévision	100W	Parc électrique français	100GW

Exercice 14.9

1. Montrer que l'énergie ΔE_C emmagasiné dans le condensateur de la figure 14.2 entre les instants $t = 0$ et $t \gg \tau$ vérifie :
$$\Delta E_C \simeq \frac{1}{2}CE^2$$
.
2. Montrer que la puissance cédée par le générateur P_c à un instant $t \geq 0$ vérifie :
$$P_c(t) = Ri^2(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right).$$
3. Quel est l'énergie perdue par effet Joule entre $t = 0$ et $t \gg \tau$.
4. Comment ces résultats sont modifiés pour le circuit LC série ?